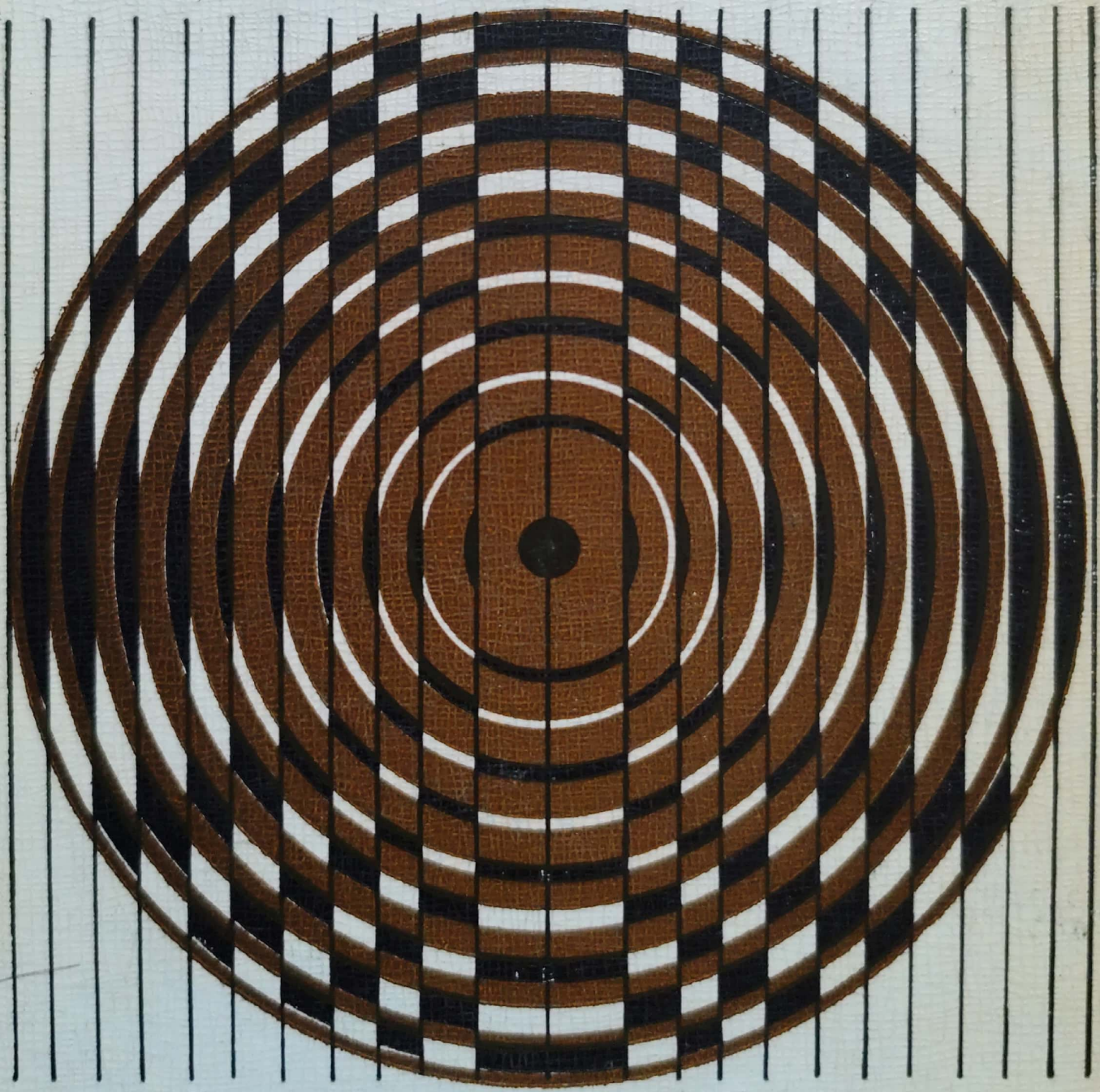
R. SCHULTEN · W. GÜTH

FIZICA REACTORILOR



Scanned with OKEN Scanner

RUDOLF SCHULTEN ● WERNFRIED GUTH

FIZICA REACTORILOR

(traducere din l. germană)

Editura tehnică
București

Scanned with OKEN Scanner

Traducere: dr. SEVASTIAN RÂPEANU
fiz. GEORGE VASILIU

Scrisă în perioada de dezvoltare a energeticii nucleare, cartea de faţă a servit ca tratat de bază pentru multe cadre de specialişti care au abordat acest domeniu pe plan mondial.

Lucrarea este compusă din două părţi:

Partea întîi. **Reactorul în stare staţionară:** Noţiuni introductive, teoria difuziei şi încetinirii, neomogenităţi în zona activă a reactorului, reactorul eterogen, teoria bigrupală.

Partea a doua. **Dinamica reactorului:** Comportarea dinamică a reactorului, influenţa temperaturii asupra dinamicii reactorului, otrăvirea reactorului, probleme privind reproducerea şi conversia, dependenţa proprietăţilor termice ale reactorului de fluxul de neutroni.

Lucrarea are şi o anexă: Bazele matematice ale fizicii reactorilor.

Se adresează fizicienilor, chimiştilor, inginerilor energeticieni şi electronişti, precum şi studenţilor şi cadrelor didactice din specialităţile menţionate.

R. Schulten, W. Güth

REAKTORPHYSIK, Erster und zweiter Band
Bibliographisches Institut, Mannheim
Hochschultaschenbücher-Verlag

Scanned with OKEN Scanner

CUVÎNT ÎNAINTE

Civilizația actuală, bazată pe o creștere fără precedent a mijloacelor de producție, a devenit mare consumatoare de energie. Cele două aspecte ale politicii economice, producția de energie și consumul ei ridică probleme care depășesc aspectele locale sau naționale, constituind o strategie mondială.

Pentru dezvoltarea mijloacelor de producție și pentru satisfacerea necesităților crescînde ale populației se impune o dezvoltare corespunzătoare a bazei energetice care constă în producerea de combustibil, de energie electrică și termică la prețuri cît mai scăzute, transportul cu pierderi cît mai mici și consumul cît mai rațional.

Pentru aceasta s-au inițiat programe complexe de cercetare și dezvoltare, avînd ca obiectiv punerea în valoare a unor noi surse de energie, pentru includerea în bilanțul energetic a noi resurse, de conversie directă a energiei chimice, solare, geotermice în energie electrică. Printre aceste programe, un rol deosebit revine conversiei energiei nucleare în energia electrică.

În acest sens, documentele de partid trasează sarcini importante științei și tehnologiei, în general, fizicii nucleare și energeticii nucleare, în particular, în etapa următoare. Astfel, se prevede ca în perioada 1976—1980 să înceapă construcția de centrale nucleare-electrice și să se continue această activitate în așa fel încît în 1990 circa 20% din consumul de energie electrică să fie produs în centrale nucleare-electrice.

Sarcina de cinste și răspundere pentru specialiștii români din numeroase domenii de cercetare și tehnologie, proiectare și construcții, realizarea centralelor nucleare-electrice implică efortul și participarea unui mare număr de persoane, calificate într-un domeniu de vîrf al științei și tehnologiei.

Pe lîngă alte forme de pregătire și specializare a cadrelor pentru domeniul nuclear, cursuri postuniversitare, facultăți de fizică și fizică tehnologică, licee de specialitate etc., existența unei informări corespunzătoare pentru toate nivelurile și specialitățile implicate a devenit o necesitate permanentă.

În ultimii ani, literatura noastră științifică s-a îmbogățit cu o serie de manuale, monografii și alte lucrări de specialitate în dome-

Scanned with OKEN Scanner

niul nuclear. La acestea, Editura tehnică adaugă astăzi, lucrarea „Fizica reactorilor", de R. Schulten și W. Güth, care răspunde unei necesități de mult resimțite în rîndurile specialiștilor și ale acelora în curs de formare din țara noastră.

Autorii cărții, unul dintre ei (R. Schulten) fiind, de altfel, și conducătorul proiectului de reactori de temperatură înaltă, răciți cu gaz, din R. F. Germania, tip de reactori care se bucură de un interes din ce în ce mai mare în lume, se adresează unor cercuri largi de cititori, de la studenți pînă la specialiștii cu experiență, pentru care abordarea anumitor probleme este făcută din puncte de vedere inedite. Tratarea fizică este îmbinată armonios cu aspectele tehnice, se evită unele calcule matematice care adeseori îngreunează descifrarea sensului fizic.

Calitățile lucrării, importanța problemelor tratate, claritatea și concizia materialului, ținuta științifică, faptul că lucrarea se adresează unui cerc larg de cititori, fac ca inițiativa Editurii tehnice de a facilita traducerea acestei cărți să fie meritorie.

Primele cinci capitole tratează funcționarea reactorilor în stare staționară, iar următoarele cinci tratează probleme de dinamică și control, coroziune, conversie și reproducere.

Ultimele trei capitole reprezintă anexe matematice care ușurează citirea cărții, fără a recurge la altă literatură complementară.

După cum se poate vedea din această scurtă enumerare a conținutului capitolelor, sînt tratate principalele probleme de fizica și tehnica reactorilor.

Calitatea deosebită a traducerii, realizată de cercetători-fizicieni, face ca lucrarea să-și păstreze accesibilitatea din original.

Sperăm ca apariția acestei lucrări să ofere unora dintre cititori posibilitatea de a-și clarifica anumite probleme de fizica și tehnica reactorilor și celor mai mulți dintre ei să le suscite interesul pentru aprofundarea lor.

Acad. prof. Ioan Ursu

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

La începutul anului 1956, cînd am intenționat pentru prima dată să scriem o carte în limba germană privind problemele de fizica și tehnologia reactorilor, nu apăruse încă nimic în legătură cu acest subiect. Curînd după aceea a apărut un mare număr de lucrări în limba engleză și o mulțime de cărți au devenit disponibile celor interesați. Munca de cercetare în domeniul energiei atomice în R. F. Germania, care pînă atunci rămăsese neglijată, a fost reluată. Dată fiind această situație, dacă cineva ar fi dorit să scrie o carte în limba germană despre fizica reactorilor, rămînea doar posibilitatea traducerii materialului din cărți străine în germană, ceea ce nu părea nici atrăgător și nici mulțumitor pentru noi, mai ales de cînd fizicienii și inginerii germani își perfecționaseră cunoștințele de limba engleză și preferau să citească în original.

De atunci s-au schimbat multe lucruri. Munca de cercetare din R. F. Germania în domeniul energiei atomice a reușit, în parte, să ajungă nivelul mondial și, între timp, au apărut multe cărți cuprinzătoare în germană, astfel încît actualmente nu mai există aproape de loc necesitatea unei literaturi bune de specialitate în limba germană. Ceea ce, într-adevăr, părea că lipsește, după cum s-a observat și din prelegeri, era o expunere scurtă și concisă a fenomenelor fizice din reactorii cu fisiune și o inițiere pentru tratarea lor matematică. Tocmai pentru a înlătura această deficiență a fost scrisă „Fizica reactorilor".

Aceste volume nu au pretenția de a înlocui lucrările clasice de pînă acum. Trebuie înțelese ca o primă informare în sprijinul fizicienilor și inginerilor care doresc să înțeleagă în afară de funcționare tehnică a unei Centrale fenomenele fizice din reactorii de putere, să devină în măsură să le descrie matematic. Am încercat, așadar, să extragem din toate noțiunile de bază din întregul domeniu al fizicii reactorilor aspectele principale și să le prezentăm astfel încît să nu se transforme într-un formalism matematic așa cum*

* Ediția germană este în două volume (Vol. I: capitolele 1—5; Vol. II: capitolele 6—13).

Scanned with OKEN Scanner

se întîmplă mai întotdeauna. La matematică s-a apelat acolo unde am considerat că ea ar putea să adîncească sau să uşureze înţelegerea fenomenelor fizice şi s-a renunţat la ea, acolo unde ar fi îngreunat înţelegerea acestora.

Din moment ce intenţia noastră este tocmai de a elucida principiile de fizică, am renunţat la abordarea problemelor speciale. De asemenea, nu vom avea tabele care pot fi căutate în literatura de specialitate, indicată de noi la sfîrşitul fiecărui volum.

Partea I prezintă, în esenţă, comportamentul din punct de vedere fizic al reactorului în regim staţionar, reacţiile dintre neutroni şi nuclee, difuzia neutronilor, etc.

Partea a II-a conţine prezentarea comportării în timp a reactorilor, modificările reactivităţii datorate otrăvurilor, controlul reactorului, regenerarea, probleme de coroziune etc.

La sfîrşit sînt prezentate, în formă concisă, mijloacele matematice din fizica reactorilor pentru fizicieni şi ingineri.

Datorăm sincere mulţumiri doamnei Ott şi doamnei Eggert pentru ajutorul oferit în pregătirea manuscrisului şi, de asemenea, domnului Dr. Stürmer şi ing. Setzwein pentru sugestiile valoroase în timpul citirii şpalturilor

Mannheim, ianuarie 1960

R. Schulten **W. Güth**

Grupul de colaborare BBC-Krupp
pentru centrale nuclearo-electrice

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

Partea întîi
REACTORUL ÎN STARE STAȚIONARĂ

I. *Introducere* 9
1. Structura atomului 9
2. Reacții între nuclee și neutroni 18
3. Reactorul nuclear 29

II. *Teoria difuziei și a încetinirii* 40
1. Secțiunea eficace 40
2. Ecuația difuziei pentru neutroni termici 46
3. Încetinirea unui neutron ca un proces luat individual 54
4. Încetinirea neutronilor de fisiune 62
5. Difuzia neutronilor în regiunea de încetinire 69
6. Constanta de difuzie 76
7. Drumul liber mijlociu de transport 80
8. Formula celor patru factori pentru reactorul omogen 81
9. Ecuația difuziei 88
10. Dimensiunile critice ale unui reactor omogen 97

III. *Neomogenități în zona activă a reactorului* 102
1. Variațiile spațiale ale factorului geometric al reactorului 102
2. Efectul de temperatură 106

IV. *Reactorul eterogen* 112
1. Factorul f 114
2. Factorul p 118
3. Factorul ε 121
4. Condiția critică pentru reactorul eterogen 123

V. *Teoria bigrupală* 120
1. Teoria bigrupală a reflectorului 128
2. Bara de control centrală în teoria bigrupală 134

Scanned with OKEN Scanner

Partea a doua

DINAMICA REACTORULUI

VI. *Comportarea dinamică a reactorului.* 141

1. Dinamica reacţiei în lanţ 141
2. Comportarea dinamică a reactorilor în ipoteza monogrupală 142
3. Comportarea dinamică a reactorilor în ipoteza bigrupală 144
4. Comportarea dinamică a unui reactor în cazul considerării a şase grupe de neutroni 151

VII. *Influenţa temperaturii asupra dinamicii reactorului* 155

1. Influenţa coeficientului de temperatură 155
2. Schimbări lente 157
3. Reglarea rapidă a transferului de căldură 164
4. Comportarea reactorului în condiţii prompt-critice 167
5. Variaţii de densitate ale agentului de transfer al căldurii 170

VIII. *Otrăvirea reactorului* 173

IX. *Probleme de reproduceree şi conversie* 180

1. Procese de reproducere şi conversie 180
2. Influenţa concentraţiei de material reproducător şi fisionabil asupra proceselor de reproducere şi conversie 184
3. Procesele de conversie cu uraniu natural şi îmbogăţit 192
4. Influenţa izotopilor cu număr de masă mare, produşi în timpul proceselor de reproducere şi conversie asupra economiei de neutroni 202

X. *Dependenţa proprietăţilor termice ale reactorului de fluxul de neutroni* . . 212

Partea a treia

BAZELE MATEMATICE ALE FIZICII REACTORILOR

XI. *Analiza vectorială* 222

1. Vectori şi matrice. 222
2. Analiză vectorială. 228

XII. *Serii şi integrale Fourier, funcţii cilindrice şi sferice* 244

XIII. *Operatori şi matrice* 264

Bibliografie 279

Index 280

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA INTII

Reactorul în stare staţionară

Capitolul I
INTRODUCERE

1. Structura atomului

a) *Modelul Bohr-Rutherford al atomului*

Prima ipoteză cantitativă privind modelul de structură pentru atom a fost făcută de către Rutherford. Datorită simplităţii lui, acest model este încă unul din cele mai folosite şi astăzi pentru descrierea unor evenimente ce apar în interiorul atomului.

Conform acestui model, atomul constă dintr-un nucleu în jurul căruia se rotesc electroni. Rutherford a fost în măsură să estimeze ordinul de mărime al diametrului nucleului din rezultatele experienţelor de împrăştiere: diametrul nucleului este de aproximativ 10^{-12} cm, în timp ce întreg atomul, incluzînd electronii ce se rotesc în păturile electronice, are un diametru de aproximativ 10^{-8} cm. Diametrul păturilor electronice este astfel de 10 000 ori mai mare decît al nucleului. În mod normal, atomul ca un întreg este neutru din punct de vedere electric, şi cum electronii sînt purtători de sarcină negativă, Rutherford a presupus că nucleul trebuie să aibă o sarcină pozitivă, egală ca mărime cu aceea a electronilor.

Bohr a completat modelul lui Rutherford cu ipotezele că electronii pot descrie numai orbite predeterminate cu energii definite şi că tranziţiile între diferite orbite posibile sînt însoţite de emisie (sau absorbţie —N.T.) de radiaţie electromagnetică.

Legea care guvernează aceste tranziţii, el a dat-o sub forma

$$h\nu = E_1 - E_2 \qquad (1.1)$$

unde h este constanta lui Planck şi ν este frecvenţa radiaţiei emise (sau absorbite), cînd electronul trece de pe o orbită cu energia E_1 pe una cu energia E_2.

Scanned with OKEN Scanner

Modul obişnuit de eliberare a energiei termice, ca, de exemplu, arderea cărbunelui, petrolului etc., se bazează pe reacţii chimice care modifică învelişul electronic exterior al atomilor. Energia eliberată per atom este deci de ordinul de mărime al diferenţei de energie între nivelele de energie menţionate mai sus, şi în general este de cîţiva electron-volţi.

O cantitate de energie mult mai mare este eliberată de reacţiile care implică participarea nucleelor atomice. În continuare va fi discutat numai acest tip de energie. Se va evita deci o descriere detaliată a învelişului electronic şi atenţia se va îndrepta către nucleele atomice.

b) *Structura nucleelor atomice*

Rutherford este şi fondatorul fizicii nucleare, deoarece el a fost primul care a despicat nucleul atomic şi pe această cale a arătat că acesta este alcătuit din mai multe părţi componente.

Astăzi avem următoarea imagine despre nucleu. Cele mai mici părţi ale sale sînt aşa numiţii nucleoni. Nucleonii sînt de două tipuri, protoni şi neutroni. Toate nucleele sînt formate din aceste două tipuri de particule, care sînt considerate particule elementare. Aşa cum am văzut în paragraful precedent, electronul este componenta de bază a învelişului atomic şi el este de asemenea o particulă elementară. El este indivizibil; are o masă foarte mică ($m_e = 0{,}9108 \times 10^{-30}$ kg) şi poartă o sarcină negativă de asemenea indivizibilă ($e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ coulombi).

Protonul este purtătorul unei sarcini pozitive în nucleu, sarcina lui fiind egală cu cea a electronului, dar cu semn opus. Protonul poartă astfel o sarcină pozitivă elementară. Din neutralitatea electrică a atomului rezultă că numărul de protoni din nucleu este egal cu numărul de electroni ce se rotesc în jurul nucleului. Numărul de electroni externi se cunoaşte din comportarea chimică a atomilor şi astfel se cunoaşte şi numărul de protoni din nucleul unui anumit atom.

Neutronii sînt particule elementare electric neutre. Masa protonului şi a neutronului sînt aproximativ egale, neutronul fiind ceva mai greu decît protonul. Masa protonului M_p şi masa neutronului M_n sînt

$$M_p = 1{,}6727 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$M_n = 1{,}6749 \times 10^{-27} \text{ kg}. \qquad (1.2)$$

Nucleonii sînt astfel de 2000 de ori mai grei decît electronii. Aceasta înseamnă că cea mai mare parte a masei atomului este concentrată în nucleu.

Scanned with OKEN Scanner

În fizica nucleară se obișnuiește să se dea masele atomilor sau nucleelor în „unități atomice de masă", și nu în grame. Baza acestei scări este masa atomului de oxigen care este luată de 16 unități, nucleul de oxigen normal conținînd 16 nucleoni. Nucleonul are deci o masă de aproximativ 1 u.a.m.[1] (conform standardelor românești, aceasta se notează cu u-N.T.).

Valorile actuale sînt:

masa protonului

$$M_p = 1{,}00758 \text{ u}$$

masa neutronului

$$M_n = 1{,}00897 \text{ u} \qquad (1.3.)$$

Notația „u.a.m." (respectiv u) este folosită pentru această scară atomică a maselor.

Astfel, pe de o parte, cunoscîndu-se numărul de electroni din învelișul electronic se cunoaște și numărul de protoni din nucleu și, pe de altă parte, cunoscîndu-se masa totală a atomului, se cunoaște numărul de neutroni din nucleu. Numărul întreg cel mai apropiat de masa atomică este numit număr de masă. Notînd cu A numărul de masă, se vede că

$$A = Z + N \qquad (1.4.)$$

unde Z — numărul de protoni și N — numărul de neutroni din nucleu. A reprezintă deci numărul nucleonilor din nucleu.

S-a arătat mai sus că protonii și neutronii pot fi considerați, ca și electronul, particule elementare. Aceasta este corect numai atît timp cît protonii și neutronii sînt părți constitutive ale nucleului. Ei nu sînt totuși indivizibili ca electronul[2]. Neutronul se poate dezintegra într-un proton și un electron, iar protonul se poate dezintegra într-un neutron și un pozitron[3]. Pozitronul este o nouă particulă elementară purtătoare de sarcină pozitivă, ale cărei proprietăți le vom descrie mai tîrziu.

Așa cum neutronul se poate transforma într-un proton și un electron, se poate considera că nucleul este format din protoni și electroni și, în consecință, neutronul nu trebuie inclus printre particulele elementare. Aceasta a fost imaginea fizicienilor înainte de Bothe (1930)[4], care a identificat neutronul ca particulă liberă și, la scurt timp, Heisenberg

---

[1] Baza actuală a scării este masa izotopului 12 al carbonului $^{12}_{6}C$ (N.T.).

[2] Potrivit ipotezei quarkurilor (Gell-Mann, Murray—1964), electronul nu este o particulă elementară, locul său fiind luat de quark ce poate avea sarcina $+\frac{1}{3}e, \pm\frac{2}{3}e$ (N.T.)

[3] În primă aproximație, în realitate mai apare cîte o particulă elementară în fiecare din cazuri; antineutrin $(\bar{\nu})$ în primul caz și neutrin (ν) în al doilea caz (N.T.).

[4] Descoperirea neutronului este atribuită lui J. Chadwick (1933). (N.T.).

(1932) a făcut ipoteza potrivit căreia nucleul este alcătuit din protoni şi neutroni şi nu din protoni şi electroni.

În felul acesta s-a înlăturat cea mai incomodă contradicţie[1] şi anume faptul că momentul magnetic observat al nucleului era în discordanţă cu valoarea prevăzută în cazul nucleului alcătuit din protoni şi electroni.

c) *Izotopii*

Acum, ştiindu-se că protonul şi neutronul sînt părţi constitutive ale nucleului să vedem cum aceste două tipuri de nucleoni se combină în nuclee.

Nu există o lege generală. Ca o regulă generală, numărul de protoni este aproximativ egal cu numărul neutronilor, dar există abateri sistematice şi statistice de la această regulă, abateri ce vor fi discutate în continuare. În fig. 1.1 sînt reprezentate faptele cunoscute. În abscisă este numărul de protoni, Z, iar pe ordonată este reprezentat numărul de neutroni, N. De exemplu, cel mai simplu element, hidrogenul, al cărui nucleu constă numai dintr-un proton, apare la $Z=1$, $N=0$. Pentru acest caz, regula nu este respectată, în timp ce ea este respectată pentru elementul imediat următor, hidrogenul greu sau deuteriul. Nucleul său, numit *deuteron*, e format dintr-un proton şi un neutron şi are coordonatele (1, 1) în fig. 1.1.

Al treilea element, cu numai un proton, este tritiul al cărui nucleu conţine doi neutroni.

Din figură se vede că numărul de protoni şi neutroni în diferite nuclee nu sînt legate printr-o regulă simplă. Atomii cu acelaşi număr de protoni, dar cu număr diferit de neutroni se numesc *izotopi* ai elementului. Izotopii unui element nu diferă unul de altul prin comportarea lor chimică, deoarece, avînd acelaşi număr de protoni, au acelaşi număr de electroni în învelişul lor electronic. Ei diferă numai prin numărul de masă, adică prin numărul de nucleoni.

Elementul următor după hidrogen, ca greutate, este heliul, al cărui nucleu conţine în mod normal doi protoni şi doi neutroni. Heliul are de asemenea cîţiva izotopi.

Datorită absenţei unei relaţii simple între numărul de protoni şi de neutroni, este necesar să se specifice nu numai simbolul chimic,

---

[1] Aşa-numita „catastrofă a azotului" N^{14}. Conform ipotezei protono-electronică, momentul magnetic al nucleului $_7N^{14}$ trebuia să fie semiintreg, conţinînd un număr impar de particule, fiecare avînd spin semiintreg. Experimental s-a constatat că spinul $_7N^{14}$ este întreg — fapt perfect explicabil în ipoteza structurii protono-neutronice conform căreia nucleul de azot are 14 nucleoni (N.T.).

Scanned with OKEN Scanner

adică H, He, N, U, etc., ci şi numărul de neutroni în nucleu. Se obişnuieşte în fizica atomică să se dea ca indici, lîngă simbolul chimic, numărul de nucleoni şi numărul de protoni din nucleu, deşi ultimul este

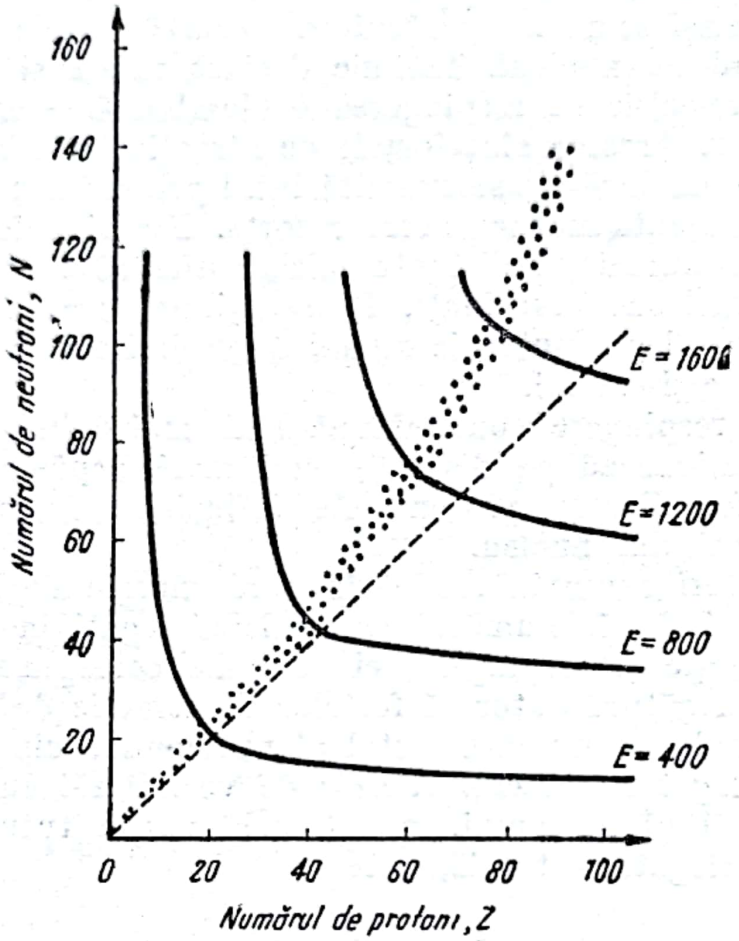


Fig. 1.1. Distribuţia nucleelor stabile în planul neutron-proton. Curbele hiperbolice sînt curbele de energie de legătură constantă; nucleele stabile se află pe crestele acestor curbe.

de prisos. Numărul de nucleoni se indică în partea de sus, iar cel al protonilor, în partea de jos a simbolului. Astfel se scriu: pentru hidrogen, ${}_{1}^{1}H$, pentru deuteriu ${}_{1}^{2}H$ şi pentru heliul obişnuit, ${}_{2}^{4}He$. Numărul de neutroni se obţine prin scăderea prefixului inferior din cel superior. Frecvent, numărul de nucleoni se scrie după simbolul chimic al elementului, de exemplu, heliu-4, uraniu-235 ş.a.m.d.; sau poate fi adăugat după simbolul chimic, de exemplu U^{235}.

Scanned with OKEN Scanner

d) *Forţe nucleare şi energie nucleară*

Există două tipuri fundamentale de forţe de legătură a nucleonilor în nucleu. În primul rînd este forţa de respingere coulombiană între sarcinile de acelaşi semn ale protonilor. Această forţă este distructivă, tinzînd să scindeze nucleul. Trebuie deci să existe şi alte forţe, care acţionează în opoziţie cu respingerea coulombiană şi care să menţină nucleul închegat. Acestea sînt forţele de atracţie între nucleoni şi sînt aceleaşi, indiferent dacă ele se exercită între protoni sau între neutroni. Este puţin cunoscută natura acestor forţe. Ele sînt foarte puternice şi se manifestă numai pe distanţe mici, astfel că se exercită practic numai între nucleoni învecinaţi. Prin acţiunea acestor forţe, fiecare din nucleoni este legat puternic numai de vecinii săi, care la rîndul lor sînt legaţi de alţi vecini.

Forţele de respingere coulombiană sînt mai slabe decît forţele de atracţie dar acţionează pe distanţe mai mari, depăşind dimensiunile nucleului. Astfel, fiecare proton este influenţat de cîmpul tuturor celorlalţi protoni din nucleu.

Ne vom referi acum la modul în care energia de legătură totală a nucleului depinde de numărul de nucleoni legaţi în el, folosind nu forţele de atracţie şi respingere, ci energiile corespunzătoare.

Energia de legătură datorată forţelor de atracţie de scurtă distanţă este proporţională cu numărul total al nucleonilor din nucleu, fiecare nucleon fiind legat cu aceeaşi energie de vecinii săi cu condiţia ca el să fie în interiorul nucleului. Astfel, contribuţia tuturor nucleonilor la energia de legătură totală, este

$$E_1 = a_1(N+Z) \tag{1.5}$$

unde a_1 este o constantă.

Ecuaţia (1.5) nu este întrutotul corectă, deoarece nu ţine seamă de faptul că o parte din nucleoni se află la suprafaţa nucleului. Pentru nucleonii de la suprafaţă legătura este mai slabă decît în cazul în care nucleonii ar fi interiori nucleului. Urmează deci că ecuaţia (1.5) supraevaluează energia totală cu o cantitate proporţională cu numărul de nucleoni aflaţi pe suprafaţa nucleului. Dacă nucleul este sferic şi destul de mare, numărul de nucleoni de la suprafaţă este proporţional cu $(N+Z)^{2/3}$ deoarece volumul este proporţional cu $(N+Z)$ şi suprafaţa e proporţională cu $(N+Z)^{2/3}$. Apare astfel un termen secundar pentru energie

$$E_2 = -a_2(N+Z)^{2/3}. \tag{1.6}$$

Un al treilea termen apare din considerarea forţelor de respingere dintre protoni. Considerînd nucleul ca o sferă încărcată uniform, ener-

gia potențială electrostatică este proporțională cu pătratul sarcinii totale $(Z)^2$ și invers proporțională cu raza, sau $(N+Z)^{1/3}$. Astfel, al treilea termen al energiei este

$$E_3 = -a_3 \frac{Z^2}{(N+Z)^{1/3}}. \tag{1.7}$$

Mai sînt doi termeni pentru energie, mai greu de înțeles. Însă, aceștia sînt mai puțin importanți pentru aprecierea funcționării unui reactor. Un termen ce micșorează energia de legătură apare din faptul că există o tendință a protonilor și neutronilor de a forma perechi separate în nucleu. Ca o consecință a acestui fapt, în particular pentru nucleele grele, nucleele cu număr egal de protoni și neutroni sînt stabile (vezi regula). Formal, aceasta se exprimă incluzînd în energie un termen care trebuie să fie simetric în N și Z. Astfel

$$E_4 = -a_4 \frac{(N-Z)^2}{N+Z}. \tag{1.8}$$

În final apare un termen ca o consecință a spinului nucleonilor. Că nucleonii posedă un spin rezultă din faptul că ei au moment magnetic. Două particule elementare identice preferă să aibă spinii în opoziție și, în consecință, nucleele cu număr par de protoni și neutroni sînt mai stabile decît cele cu număr impar de particule. De exemplu, din 274 nuclee, 164 au număr par de protoni și neutroni, 53 au număr par de neutroni și număr impar de protoni, 55 au număr impar de neutroni și număr par de protoni și există numai 4 nuclee stabile cu număr impar de protoni și neutroni. Componenta energiei, corespunzătoare acestui efect, este

$$E_5 = \pm a_5 (N+Z)^{-3/4} \tag{1.9}$$

în care $a_5 = 0$ pentru număr par de neutroni și impar de protoni sau invers. Semnul pozitiv apare dacă ambele numere sînt pare și semnul negativ dacă ambele numere sînt impare.

Adunînd relațiile (1.5)—(1.9) și împărțind prin $(N+Z)$, numărul de nucleoni, se obține energia medie de legătură per nucleon

$$\frac{E}{(N+Z)} = a_1 - \frac{a_2}{(N+Z)^{1/3}} - \frac{a_3 Z^2}{(N+Z)^{4/3}} - a_4 \frac{(N-Z)^2}{(N+Z)^2} \pm \frac{a_5}{(N+Z)^{7/4}} \tag{1.10}$$

Ecuația (1.10) dă energia E în funcție de N și Z; curbele de E constant sînt reprezentate în fig. 1.1. Valoarea maximă a energiei de legătură apare pe creastă în fig. 1.1 și se vede că aici sînt grupați izotopii naturali. Vedem că pentru nucleele ușoare, regula este respectată și numărul de protoni este egal cu numărul de neutroni. Aceasta indică tendința de împerechere între neutroni și protoni. Cu cît este mai

Scanned with OKEN Scanner

greu nucleul, cu atît mai departe deasupra liniei $N—Z$ se află porţiunea stabilă. Uraniu-235, de exemplu, are 92 de protoni şi 143 neutroni în nucleul său. Pentru nucleele grele, numărul de neutroni depăşeşte considerabil numărul de protoni. Aceasta, datorită faptului că numărul de protoni este cu atît mai mare, cu cît este mai mare nucleul şi deci forţa de respingere între protoni este mai mare. Pentru a compensa aceste forţe de respingere suplimentare, este necesar un număr suplimentar de neutroni. Surplusul de neutroni are sarcina de a menţine nucleul compact.

Dacă se presupune că $N \approx Z$ şi se ţine seamă de ecuaţia (1.10), se poate găsi o expresie pentru energia medie de legătură per nucleon pentru izotopii naturali, adică a acelora aflaţi pe creasta curbei energiei totale de legătură constante, din fig.1.1. Acum, al patrulea termen acela datorat efectului de împerechere, este mult mai mic decît primii trei termeni. Termenul al cincilea din ecuaţia (1.10) este şi el mic ceea ce înseamnă că energia de legătură poate fi aproximată de către primii trei termeni

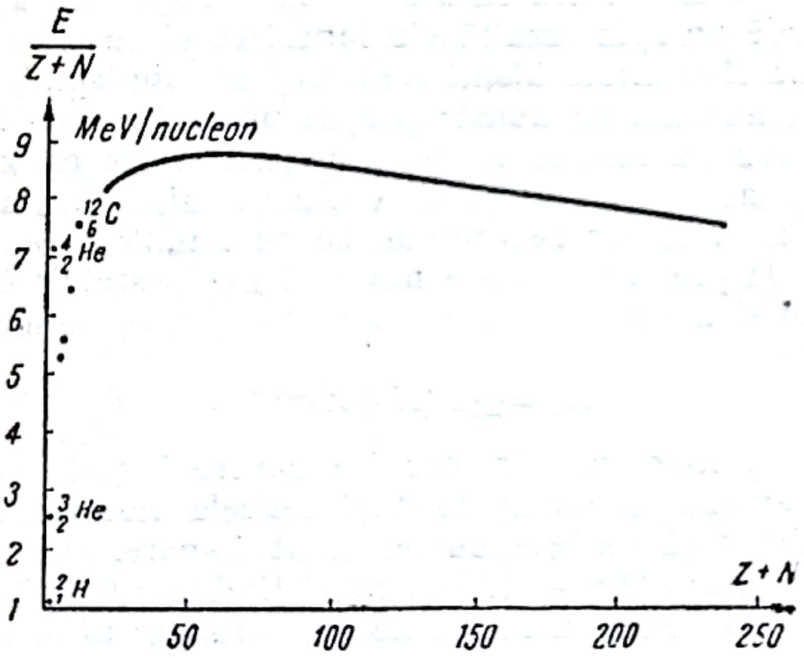


Fig. 1.2. Dependenţa energiei de legătură per nucleon, de numărul de masă $(N+Z)$, în conformitate cu ecuaţia (1.11). Nucleele stabile aflate deasupra curbei sînt: heliu-4 şi carbon-12.

$$\frac{E}{N+Z} = a_1 - \frac{a_2}{(N+Z)^{1/3}} - \frac{a_3 Z^2}{(N+Z)^{4/3}} \quad (N \approx Z). \qquad (1.11)$$

Energia medie de legătură per nucleon, $E/(N+Z)$, dată de ecuaţia (1.11), este reprezentată în fig. 1.2 pentru nucleele stabile.

Scanned with OKEN Scanner

Forma curbei este acum uşor de explicat. Dacă toţi nucleonii ar fi legaţi cu aceeaşi energie, indiferent de mărimea nucleului şi poziţia lor în el, curba ar fi o linie orizontală la înălţimea a_1 (din primul termen al ecuaţiei (1.11)). Această energie de legătură, totuşi, este prea mare deoarece unii dintre nucleoni se află pe suprafaţa nucleului şi ei nu sînt legaţi atît de strîns. Trebuie scăzută deci o anumită contribuţie de energie, care creşte cu raportul dintre suprafaţa şi volumul nucleului, adică cu cît este mai mic nucleul, cu atît este mai mare cantitatea de energie care trebuie scăzută (al doilea termen din ecuaţia (1.11)). Astfel, pentru nucleele uşoare curba coboară. Acest efect de suprafaţă joacă un rol neglijabil în cazul nucleelor mari, dar în schimb forţele de respingere între protoni devin importante. Respingerea coulombiană care acţionează în opoziţie cu forţele nucleare de atracţie, are un efect important. Energia medie de respingere per proton nu este constantă ca în cazul energiei nucleare de legătură de atracţie (ecuaţia (1.5)), ci creşte cu numărul de protoni (ecuaţia (1.7)). Cu cît este mai greu nucleul, conform regulii $N \approx Z$ şi numărul de protoni este mai mare, deci şi forţa de respingere între protoni este mai mare. Trebuie deci scăzut un alt termen de energie care creşte cu numărul de masă. Astfel, curba din fig. 1.2 coboară pentru nucleele mai grele. Practic nucleele stabile se găsesc strînse pe curba din fig. 1.2. Mai multe nuclee, cum ar fi cel de heliu şi carbon, sînt mai strîns legate decît nucleele vecine. Pentru acestea, numărul de neutroni este egal cu numărul de protoni şi mai mult decît atît, ambele numere sînt pare. Stabilitatea acestor nuclee este analogă cu stabilitatea (chimică — N.T.) gazelor inerte.

Astfel, modelul nostru explică forma curbei din fig. 1.2. Importanţa ei practică se va vedea în continuare.

Nucleele a căror număr de masă $(N+Z)$ este în jurul valorii 60 sînt în general mai stabile decît nucleele mai uşoare sau mai grele, adică energia lor de legătură este mai mare. Aceasta înseamnă că se poate obţine energie utilă fie prin ruperea nucleelor grele în nuclee de masă mijlocie, fie prin sinteza celor mai uşoare nuclee în nuclee de masă medie. Metodele de obţinere vor fi descrise mai tîrziu.

În acest fel, energia potenţială este transformată în energie cinetică. Prima metodă de eliberare a energiei se realizează în reactorul cu *fisiune*, iar cea de-a doua în bomba cu hidrogen şi precursorul ipoteticului reactor cu *fuziune*. În primul caz, nucleele grele, precum U-235 sînt fisionate cu ajutorul neutronilor şi transformate în nuclee de masă mijlocie, de exemplu Xe etc., iar în al doilea caz, nucleele uşoare ca deuteriul şi tritiul fuzionează împreună pentru a forma heliu.

Ecuaţia de reacţie se poate scrie într-o formă analogă celei folosite în chimie

$$^{2}_{1}\mathrm{D} + ^{3}_{1}\mathrm{T} = ^{4}_{2}\mathrm{He} + n.$$

Scanned with OKEN Scanner

n reprezintă neutronul produs în reacție. În cele ce urmează ne vom ocupa numai de energia eliberată prin fisiune de către nucleele grele.

2. Reacții între nuclee și neutroni

Paragraful 1 d) a descris tipurile de legături ale nucleonilor în nuclee și sistematica structurii nucleului. Aceste cunoștințe vor fi aplicate în discutarea reacțiilor între neutroni și nuclee.

Există un motiv practic pentru care se preferă discutarea reacțiilor cu neutroni, înaintea celor cu particule α (nuclee de heliu) sau cu protoni. Pentru a produce o reacție între un proton și un nucleu, protonul trebuie să fie adus în imediata apropiere a nucleului. Pentru aceasta, protonul trebuie să aibă o energie considerabilă, încît să poată învinge respingerea coulombiană dintre el și nucleu (ambii avînd sarcină pozitivă). O astfel de energie înaltă și corespunzător o viteză mare poate fi obținută în laborator cu ajutorul acceleratorilor de particule, dar greu de obținut într-un reactor nuclear. Neutronii, fiind neutri, nu întîmpină o astfel de respingere din partea nucleelor. Ei se pot apropia nestînjeniți de nuclee și interacționa cu acestea.

Distingem trei tipuri esențiale de reacții ale neutronilor:

a) fisiunea unui nucleu greu,
b) captura neutronului de către un nucleu,
c) împrăștierea neutronului de către un nucleu.

a) *Fisiunea nucleară*

Fisiunea unui nucleu prin ciocnirea cu un neutron este cea mai importantă reacție care are loc într-un reactor, deoarece prin ea se eliberează energia nucleară.

După cum s-a mai arătat numai nucleele cele mai grele pot fi fisionate. Explicația este simplă. Am văzut în paragraful precedent că energia de legătură medie per nucleon la nucleele grele este mai mică decît a nucleelor de masă mijlocie (fig.1.2). Aceasta înseamnă că nucleele grele sînt mai puțin compacte decît nucleele de masă mijlocie din cauza forțelor de respingere mai puternice între protoni. Desigur, ele sînt menținute datorită neutronilor, dar structura lor nucleară nu este atît de rigidă ca a nucleelor de masă mijlocie și deci sînt mai ușor de sfărîmat.

Scanned with OKEN Scanner

S-a stabilit de asemenea că în practică numai nucleele grele cu număr de masă impar sînt mai ușor fisionabile. Astfel, U-235 poate fisiona ușor, în timp ce U-238 nu. Nucleele cu număr de masă par sînt mai stabile decît acelea cu număr de masă impar.

În majoritatea cazurilor, fisiunile sînt provocate de neutroni *lenți*. Și acest efect poate fi explicat fizic. Pentru a fisiona un nucleu, un neutron trebuie să interacționeze cu acesta. Este suficient dacă el trece la o distanță mică de nucleu. Datorită tendinței nucleului de a fisiona, trecerea neutronului pune nucleul într-o stare de oscilație, care, dacă are o amplitudine suficientă, duce la ruperea acestuia. (Neutronul va fi capturat de nucleu în felul acesta.) Pentru a pune nucleul în stare de oscilație, cauza trebuie să persiste un timp finit. Cu cît neutronul se află un timp mai îndelungat în vecinătatea nucleului, sau cu cît viteza sa este mai mică, cu atît mai mare va fi oscilația nucleară și deci mai mare probabilitatea de fisiune a nucleului. Deci, într-un reactor, se folosesc neutroni lenți, pentru a produce fisiunea. Acești neutroni lenți au o energie medie de cîteva sutimi de electron-volt (eV)[1]. Această energie corespunde energiei termice medii a moleculelor în reactor. Ne referim, prin urmare, la domeniul de energie în care fisiunea uraniului predomină, ca fiind domeniul termic, și astfel de neutroni se numesc *neutroni termici*. Probabilitatea ca un neutron să producă fisiunea este deci invers proporțională cu viteza sa (legea $1/v$). O astfel de lege poate fi explicată numai cu ajutorul mecanicii cuantice.

Mecanismul transformării energiei în timpul fisiunii unui nucleu nu poate fi explicat clasic. El poate fi explicat numai în limbajul formal al matematicianului. O astfel de descriere a fost dată de către Einstein, care arată că echivalența dintre masă și energie apare în mod natural din teoria relativității elaborată de el.

Vom ilustra această echivalență în cazul reacției de fisiune ce apare într-un reactor nuclear.

Nucleul de U-235 fisionează cînd el interacționează cu un neutron. Masa nucleului de uraniu plus masa neutronului este, în unități atomice de masă,

$$M(U_{235})+M(n)=235{,}124+1{,}00897=236{,}133 \text{ u.}$$

Fie nucleul de U-235 descompus în două părți cu numerele de masă 95 și 139, avînd următoarele mase

$$M_{139}=138{,}955 \text{ u} \qquad \text{și} \qquad M_{95}=94{,}945 \text{ u.}$$

Sînt eliberați doi neutroni ale căror mase sînt

$$2M_n=2\times 1{,}00897=2{,}01794 \text{ u}$$

[1] Vezi pag. 20 pentru definiția eV.

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd bilanțul maselor pentru această reacție de fisiune, se vede că suma maselor fragmentelor de fisiune și a celor doi neutroni este cu 0,215 u mai mică decît masa U-235 și a neutronului care a produs fisiunea. Deci în procesul de fisiune s-a pierdut o cantitate de masă sau material.

Acest efect nu poate fi explicat pe baza fizicii clasice, ci numai pe baza previziunii mai generale a lui Einstein că masa și energia sînt echivalente. În reacția de fisiune discutată mai sus, masei $\Delta m = 0{,}215$ u îi corespunde o cantitate de energie echivalentă ΔE. Energia ΔE este energia de fisiune care se obține sub formă de energie termică la fisiunile nucleelor de U-235. Relația simplă se leagă aceste două entități fizice diferite, masa și energia este

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \tag{1.12}$$

Constanta c^2, pătratul vitezei luminii, este aici, numai o constantă de proporționalitate. Este clar că nici un model bazat pe o descriere clasică nu va explica această transformare a energiei.

Este necesar să menționăm acum unitatea de energie folosită în general în fizica nucleară. Electronii accelerați într-un cîmp electric sînt folosiți frecvent pentru investigarea învelișului electronic al atomilor, așa că electron-voltul este o unitate convenabilă pentru energie în fizica atomică. Un electron-volt este cantitatea de energie primită de un electron cînd el este accelerat într-un cîmp electric creat de o diferență de potențial de un volt. Energia echivalentă este

$$1\text{eV} = 1{,}602 \times 10^{-12} \text{ erg} = 1{,}602 \times 10^{-19} \text{ W} \cdot \text{s(Joule)} = 0{,}383 \times 10^{-19} \text{ cal}^{1)}.$$

Schimburile de energie implicate de tranzițiile electronilor între orbite și deci în reacțiile chimice sînt de ordinul de mărime al cîtorva electron-volți.

Schimburile de energie în fizica nucleară sînt de obicei mult mai mari. De exemplu, fig. 1.2 arată că energia de legătură medie per nucleon este de circa 8 MeV pentru nuclee grele. Un MeV, un mega-electron-volt, este 10^6 eV, deci

$$1\text{MeV} = 1{,}602 \times 10^{-6} \text{ erg} = 1{,}602 \times 10^{-13} \text{ W} \cdot \text{s (Joule)} = 0{,}383 \times 10^{-13} \text{ cal} = 1{,}074 \times 10^{-3} \text{ u}. \tag{1.13}$$

---

[1]) Energia cinetică de translație pe grad de libertae pentru un atom sau neutron este (1/2) kT (T — temperatura), și o energie de 1 eV corespunde la o temperatură de $2{,}32 \times 10^4$ °K.

Ultima egalitate exprimă relaţia lui Einstein din ecuaţia (1.12).

Deoarece schimburile de energie în reacţiile nucleare sînt mult mai mari decît în cazul reacţiilor chimice, conbustibilul nuclear este mult mai productiv decît combustibilul convenţional cum ar fi petrolul şi cărbunele care produc energie în urma tranziţiilor electronice sau chimice.

Cu ajutorul relaţiei (1.13) vom calcula acum energia eliberată prin fisiunea U-235. Am arătat că schimbul de masă este 0,215 u. Din (1.13) se vede că aceasta corespunde la $\Delta E = 198$ MeV $= 3{,}18 \times 10^{-11}$ W · s (Joule). Această energie o obţinem sub formă de căldură, deoarece fragmentele de fisiune capătă viteze foarte mari şi, ciocnindu-se cu alţi atomi, măresc viteza agitaţiei termice a acestora.

În afară de energie, la fisiunea nucleelor grele se eliberează şi cîţiva noi neutroni, care sînt de importanţă fundamentală pentru funcţionarea reactorului.

Neutronii noi sînt desigur esenţiali pentru producerea în continuare a fisiunii, deoarece neutronii care produc fisiunea sînt consumaţi în reacţie. Dacă nu ar fi generaţi neutronii noi pe o cale sau alta, reactorul ar ieşi din funcţiune.

Mecanismul de producere al neutronilor noi este acelaşi cu cel al procesului de fisiune. Se vede din figura 1.1 că numărul de neutroni în nucleele grele depăşeşte numărul de protoni. Aceşti neutroni în exces compensează forţa de respingere dintre protoni. Ca rezultat al fisiunii, nucleele grele se divid în nuclee mai uşoare, şi fig. 1.1 arată că aceasta implică un exces de neutroni proporţional mai mic pentru a compensa respingerea coulombiană. Există deci neutroni disponibili după fisiune. Aceşti neutroni disponibili, 2 sau 3 per fisiune, depinzînd de fragmentele de fisiune produse, apar imediat după fisiune, cu excepţia unei mici fracţiuni care sînt cedaţi după o secundă sau mai tîrziu. Aceşti neutroni se numesc *neutroni întîrziaţi*. Ei au, aşa cum se va vedea, importanţă deosebită în controlul reactorului.

Ca şi fragmentele de fisiune, şi neutronii de fisiune (eliberaţi prin fisiune), zboară cu viteze foarte mari. În medie, vitezele lor corespund energiei de 1—2 MeV, unii neutroni avînd energii pînă la 10 MeV. Fig. 1.3. arată distribuţia energiei cinetice a neutronilor de fisiune.

În cele ce urmează ne vom ocupa de fragmentele de fisiune. Ele sînt răspunzătoare pentru cele mai neplăcute aspecte legate de energia nucleară eliberată în reactorii cu fisiune, şi anume radiaţia radioactivă

Scanned with OKEN Scanner

care în acest studiu va fi menţionată pe scurt. La fisiune, nucleul greu se rupe în fragmente, care în general nu se află stare energetică optimă. Asemenea fragmente de fisiune se transformă cu timpul în nuclee stabile, mai convenabile din punct de vedere energetic. O astfel de transformare are loc pur probabilistic şi nu indusă de o cauză externă. Aceasta, datorită faptului că nucleonii într-un nucleu cvasistabil sînt în agitaţie termică, schimbîndu-şi continuu poziţia în nucleu. La un moment dat apare o configuraţie favorabilă pentru o transformare ca, de exemplu, una în care doi protoni se unesc cu doi neutroni pentru a forma un nucleu de heliu. Aceasta stă la baza reacţiei de fuziune, care, aşa cum ştim, degajă energie, energie care poate fi folosită de nucleul de heliu pentru a părăsi nucleul „mamă". O astfel de dezintegrare este numită *emisie* α, şi nucleul de heliu emis este numit *particulă* α. Particulele α sînt emise de nucleele de uraniu cu viteze mari, asemănătoare fragmentelor de fisiune. Energia lor cinetică variază de la 4 la 10 MeV.

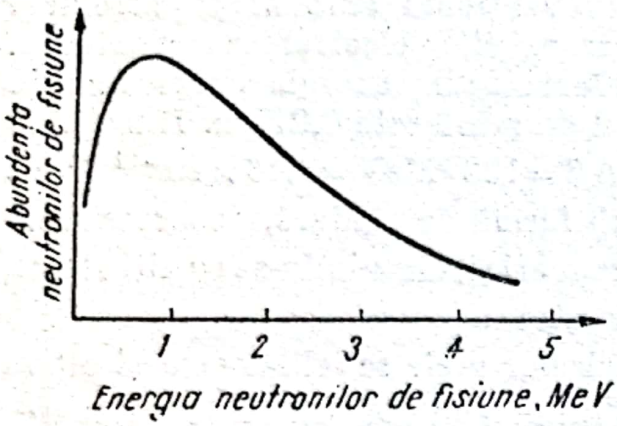


Fig. 1.3. Distribuţia în energie a neutronilor de fisiune.

În afară de emisia de particule α, există alte două tipuri de emisii de particule, radiaţiile β^- şi β^+. Particulele β^- sînt *electroni*, iar particulele β^+, *pozitroni*. Ultimele au o viaţă extrem de scurtă şi au o contribuţie minoră la energia nucleară. Radiaţiile β^+ sînt emise de nuclee cînd unul dintre protonii acestora se transformă într-un neutron. Radiaţiile β^- sînt produse prin transformarea unui neutron în proton, aşa cum s-a descris mai înainte în paragraful 1 b). Energia cinetică a acestor particule β variază între 0,01 şi 12 MeV. Limita superioară corespunde aproape vitezei maxime posibile, vitezei luminii.

În afara acestor aşa-numite particule β nucleare, există de asemenea radiaţii β secundare. Acestea sînt electroni emişi din păturile electronice exterioare atomilor, cînd aceştia interacţionează cu razele γ.

Radiaţiile γ sînt al patrulea tip de radiaţii radioactive. Ele nu sînt emisii corpusculare precum radiaţiile α şi β, ci sînt radiaţii electromagnetice[1]. Nucleul poate să existe într-o multitudine discontinuă de stări energetice, ca şi electronii în păturile electronice. La o trecere din-

[1]) Conform teoriei lui Planck, şi radiaţiile electromagnetice au proprietăţi corpusculare, după cum conform ipotezei lui Louis de Broglie, radiaţiile corpusculare au proprietăţi ondulatorii (N.T.).

Scanned with OKEN Scanner

tr-o stare energetică superioară în una inferioară este emisă o radiaţie electromagnetică. Frecvenţa radiaţiei este dată de asemenea de ecuaţia(1.1)

$$E_1 - E_2 = h\nu.$$

Totuşi, din cauză că variaţia de energie la tranziţiile din interiorul nucleului este mult mai mare, frecvenţa este şi ea mult mai mare decît aceea ce apare la tranziţiile între păturile electronice.

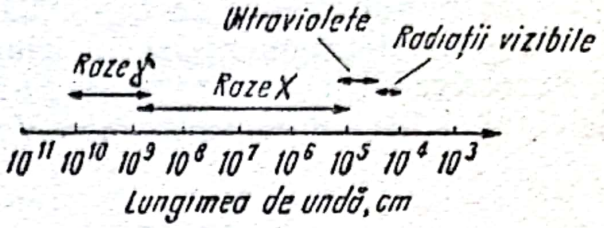


Fig. 1.4. Spectrul radiaţiilor electromagnetice.

Energia radiaţiilor γ variază pînă la 2,5 MeV. Domeniul de frecvenţă este arătat în fig. 1.4, în care lungimile de undă pentru diferite tipuri de radiaţii electromagnetice sînt prezentate într-o scară logaritmică.

În mod normal nucleele se află în stare fundamentală, adică starea cu energia cea mai mică. În timpul procesului de fisiune, a dezintegrării radioactive sau după captura unui neutron (despre care va fi vorba în paragraful următor) se produc stări nucleare excitate care, mai devreme sau mai tîrziu, în conformitate cu legile statistice, trec în starea fundamentală, cu emisia unei radiaţii gama, dacă nu există un alt mod de dezintegrare. Rezultă că radiaţiile gama însoţesc practic toate reacţiile nucleare.

În afară de transformările nucleare, radiaţiile gama pot fi de asemenea produse prin unirea pozitronilor cu electronii. Acest proces este numit *anihilare de perechi*; pozitronul şi electronul dispar în întregime şi masa lor se transformă în radiaţie gama de o anumită energie[1]. Procesul invers este de asemenea posibil: radiaţia gama se transformă într-un electron şi un pozitron. Acest proces este numit *formare de perechi*.

Legea care guvernează dezintegrarea unei substanţe radioactive depinde direct de probabilitatea ca un nucleu să se dezintegreze. Deci probabilitatea ca un număr dN din cele N nuclee radioactive să se dezintegreze într-un timp dt este independentă de timp, adică

$$dN/N = -\lambda dt. \qquad (1.14)$$

λ este o constantă caracteristică substanţei radioactive şi este o măsură a vitezei cu care substanţa se dezintegrează. Ea este numită *constantă de dezintegrare*. Din integrarea ecuaţiei (1.14) rezultă

$$N = N_0 \exp(-\lambda t). \qquad (1.15)$$

[1]) Vezi comentariul de la pagina 20 (N.T.).

Scanned with OKEN Scanner

N_0 este valoarea inițială a lui N, la timpul $t=0$. Timpul necesar pentru a reduce acest număr la jumătate este

$$t_{1/2}=(1/\lambda)\ \ln\ 2=0{,}694/\lambda. \qquad (1.16)$$

$t_{1/2}$ este numit *durata de înjumătățire.*

În general fragmentele de fisiune nu se dezintegrează dintr-o dată, ci succesiv. De aceea, este necesar să se folosească mai multe ecuații de tipul (1.14), cuplate între ele. Vom întîlni astfel de ecuații mai tîrziu.

b) *Captura neutronului*

Prin captura neutronilor se înțelege o reacție în care un nucleu absoarbe un neutron fără a fisiona. Captura neutronilor este importantă pentru tehnologia reactorului din două motive. Primul motiv este neplăcut. Neutronii sînt pierduți la captură fără a se crea alți neutroni sau a se elibera energie. Este necesar ca neutronii să fie păstrați cu grijă în reactor sau, așa cum se va arăta, reactorul va trebui să fie mărit. Cu cît numărul de neutroni pierduți prin captură este mai mic, cu atît se poate construi reactorul cu dimensiuni mai mici.

Al doilea motiv al interesului pentru captura neutronului este acela că dacă neutronul este capturat într-un nucleu greu, care nu fisionează și care are un număr de masă par, de exemplu U-238 sau Th-232, nucleul nou format va avea un număr de masă impar și deci va fi ușor fisionabil. Avem în acest fel posibilitatea de a folosi orice neutron suplimentar pentru producerea de noi nuclee combustibile și aceasta mărește rezervele noastre de combustibil. În acest fel trebuie să recîștigăm și neutronii care s-ar pierde.

Distingem de obicei două moduri de captură a neutronilor: absorbția *termică* și absorbția de *rezonanță*. Absorbția termică este captura neutronilor termici, în timp ce absorbția de rezonanță este captura neutronilor de energie mai mare. Ambele procese de captură sînt însoțite de emisie de radiații gama.

Caracteristic absorbției de rezonanță este faptul că probabilitatea de captură depinde sensibil de viteza neutronului. Captura apare numai la viteze bine definite, discrete ale neutronilor. Pentru neutroni cu energii mai mari sau mai mici decît așa-numitele *energii de rezonanță*, probabilitatea de captură este foarte mică.

Această comportare caracteristică este explicată astfel: s-a arătat la descrierea radiațiilor gama, că nucleul posedă diferite nivele discrete de energie. Cînd un nucleu capturează un neutron, energia de legătură predeterminată a neutronului se adaugă la cea a nucleului. Pe lîngă energia sa de legătură, neutronul aduce și energia cinetică corespun-

Scanned with OKEN Scanner

zătoare vitezei sale. Aceste două energii sînt înmagazinate de către nucleu, care trece într-o stare energetică excitată. Dar aceasta se poate întîmpla numai cu condiția ca energia totală primită de nucleu să fie riguros egală cu diferența de energie dintre două nivele energetice, acela al nucleului înainte de captură și cel de după captură. Întrucît diferențele de energie între nivele sînt fixe și discrete pentru un nucleu dat și de asemenea energia de legătură a neutronului, rezultă că neutronul trebuie să aibă anumite energii cinetice discrete pentru ca reacția de captură de rezonanță să fie probabilă.

Captura de rezonanță în U-238 este ilustrată în fig. 1.5, a și b care arată dependența secțiunii eficace de energia cinetică a neutronului, ambele într-o scară logaritmică. Se văd cît de pronunțate sînt picurile de rezonanță.

Poziția picurilor de rezonanță diferă de la un nucleu la altul și în fiecare caz depinde de structura nivelelor de energie a nucleelor. De asemenea domeniile de energie în care apar rezonanțele sînt diferite. Cu toate acestea picurile de rezonanță, pentru cele mai multe nuclee, sînt situate între 1 și 1 000 eV. Acest domeniu de energie este numit *regiune de rezonanță* (vezi fig. 1.6).

Domeniul de energii în care fisiunea uraniului este mai probabilă este situat sub regiunea de rezonanță, în timp ce energia neutronilor de fisiune este cea arătată în fig. 1.6, situată deasupra ei. Astfel, neutronii de fisiune trebuie să treacă prin regiunea de rezonanță, în procesul de încetinire pînă la energia la care ei produc fisiune.

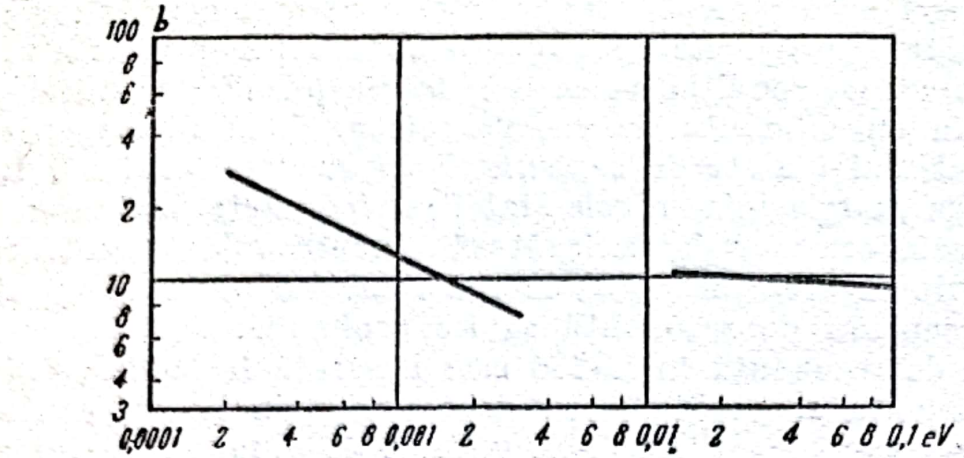
În procesul de încetinire, neutronii pot fi capturați, dar datorită lărgimii mici a picurilor, majoritatea scapă de captură. Probabilitatea fiecăruia de a scăpa de captură este numită *probabilitate de evitare a capturii de rezonanță*. La ea ne vom referi adesea în cele ce urmează.

Pentru captura neutronului termic nu sînt necesare nivele energetice de rezonanță. Promptitudinea în captură în regiunea termică este explicată pe aceeași bază ca și promptitudinea de fisiune cu neutroni lenți (vezi paragraful 2a).

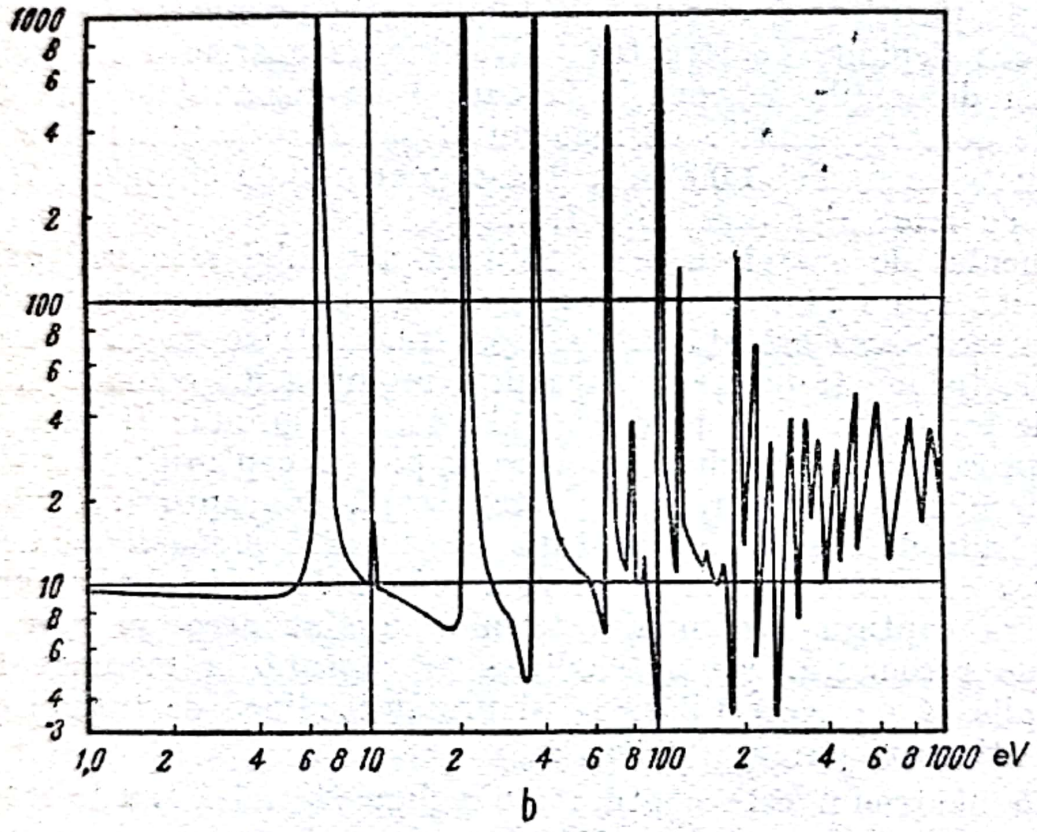
Dacă neutronul este capturat în regiunea termică sau de rezonanță, nucleul este transformat în izotopul următor al speciei sale, care adesea reprezintă începutul unui lanț de dezintegrare. Vom menționa două astfel de lanțuri de dezintegrare, importante pentru tehnologia reactorilor, lanțurile U-238 și Th-232. Izotopul natural U-238 este punctul de pornire al lanțului U-238.

U-238 se găsește în natură amestecat cu U-235 fisionabil, în raportul 140 : 1 (pentru fiecare atom U-235 există 140 atomi U-238). Uraniul avînd această compoziție se numeste *uraniu natural*, spre deosebire de *uraniul îmbogățit*, în care proporția de atomi de U-238 a fost micșorată.

Scanned with OKEN Scanner



a



b

Fig. 1.5, a și b. Secțiunea eficace de excitare a U-238 în diferite domenii ale energiei.

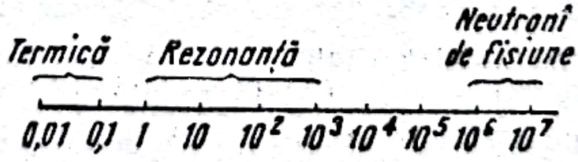


Fig. 1.6. Regiunile energetice principale ale neutronilor

U-238 fisionează foarte puțin, dar el are capacitatea de a absorbi neutronii rapizi prin absorbția de rezonanță, precum și neutronii termici. El este transformat în acest fel în izotopul U-239 al uraniului.

U-239 se poate transforma în două feluri. El poate fie să absoarbă un alt neutron pentru a forma U-240, fie să se dezintegreze printr-o emisie β trecînd în neptuniu-239. Acesta este un exemplu cînd un neutron într-un nucleu se transformă într-un proton, așa cum s-a descris mai înainte. Neptuniu-239 poate din nou să captureze un neutron pentru a forma Np-240 sau printr-o altă dezintegrare β să se transforme în plutoniu-239. Plutoniu-239 poate să treacă în timp în Pu-241 prin capturarea altor doi neutroni.

Lanțul U-238 este arătat schematic în fig. 1.7, a. El nu este pe deplin explicitat, însă conține tot ceea ce este esențial pentru noi.

Cel mai important produs al U-238 este plutoniu-239, care este fisionabil, deoarece este un element greu cu număr de masă impar. Într-un reactor termic, adică un reactor în care fisiunea este produsă de neutronii termici, plutoniul este totuși un combustibil nedorit, din mai multe motive.

Al doilea dintre lanțurile de dezintegrare interesante începe cu Th-232 și este similar cu lanțul uraniului. Th-232 se transformă prin captura neutronului în Th-233, care, prin același proces, poate fi trasformat în Th-234. Cea mai mare parte totuși a Th-233 se dezintegrează printr-o emisie β și trece în protactiniu-233. Protactiniu-233 este transformat prin captura unui neutron în Pa-234, însă de obicei se dezintegrează printr-o emisie β și trece în U-233. Uraniu-233 este un combustibil nuclear mai potrivit decît plutoniul. Fig. 1.7, b arată lanțul toriului.

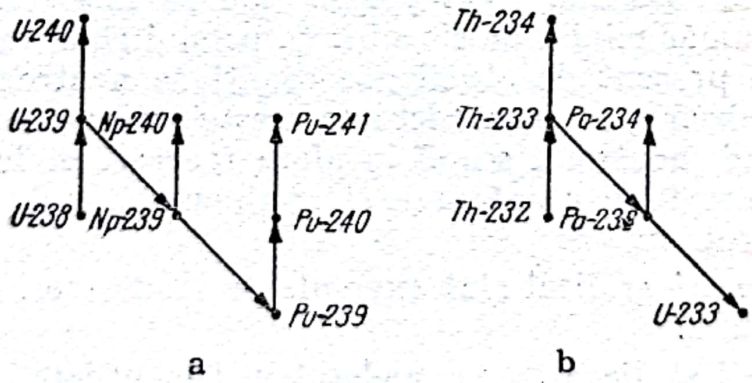


Fig. 1.7. Lanțul uraniului (a) și lanțul toriului (b). Aranjamentul geometric al elementelor este ca în figura 1.1; captura neutronului produce o deplasare în sus pe ordonată, iar dezintegrarea β, o deplasare spre dreapta și în jos.

Scanned with OKEN Scanner

Deci, neutronii se pot folosi pentru a produce combustibil nou. Devine astfel posibilă alimentarea inițială a reactorului cu U-235 conținînd în plus și toriu. Toriul poate fi transformat în U-233, care, fiind fisionabil, poate fi ars în parte, dar după un timp o parte din U-233 poate fi extras și după acumularea unei cantități suficiente el poate fi folosit ca încărcătură combustibilă în alt reactor. Acest mod de producere a combustibilului se numește *reproducere.*

c) *Împrăștierea neutronului*

Împrăștierea este, evident, cea mai simplă reacție a neutronului. Neutronul se ciocnește cu un nucleu și ca rezultat el este împrăștiat „elastic" sau „neelastic". În mecanică acest proces s-ar numi reflexie. Importanța acestui proces pentru tehnologia reactorului constă în faptul că în timpul procesului energia este transferată de la neutron la nucleu. Cu cît nucleul este mai ușor, cu atît energia transferată este mai mare.

Se știe că pentru fisiunea uraniului se folosesc neutroni lenți, neutroni termici, dar că neutronii produși la fisiune, neutronii de fisiune, sînt eliberați cu energie foarte mare. Trebuie deci găsită o metodă pentru a micșora energia neutronilor. În acest scop combustibilul din reactor este amestecat cu un material, alcătuit din atomi ușori, denumit *moderator*. Neutronii, fiind electric neutri, se pot mișca liber prin substanță, părăsind regiunea cu combustibil și, prin ciocniri repetate cu nucleele moderatorului, sînt încetiniți pînă cînd energia lor medie a atins energia termică. Neutronii termici pot apoi să producă fisiunea combustibilului.

Sînt două motive pentru a susține că moderatorul trebuie să fie format din atomii cei mai ușori posibili sau că încetinirea trebuie să se facă cu un număr minim de ciocniri. În primul rînd, orice moderator conține un mic procent de atomi absorbanți de neutroni și deci probabilitatea de absorbție în moderator crește cu numărul de ciocniri. În al doilea rînd, neutronii scapă în afara reactorului în timpul încetinirii și cu cît e mai mic numărul de ciocniri, cu atît mai puțini neutroni părăsesc reactorul.

Apa, apa grea și grafitul sînt exemple de moderatori folosiți în tehnologia reactorului.

Apa ar trebui să fie un bun moderator. Din păcate, apa împrăștie neutronii, dar îi și absoarbe. Apa grea este mai potrivită. Ea nu are proprietăți de încetinire atît de bune ca apa, în schimb nu absoarbe neutronii aproape deloc. Grafitul, format din carbon cu numărul de masă 12, nu încetinește neutronii atît de bine ca apa sau apa grea, dar prezintă avantajul tehnologic că este solid.

Scanned with OKEN Scanner

După cum s-a mai arătat, există două tipuri de împrăştiere, elastică şi neelastică. Împrăştierea neelastică poate fi descrisă ca un proces în care un neutron intră într-un nucleu, îl excită trecîndu-l într-o,stare energetică superioară, şi apoi acelaşi neutron (sau altul) este reemis. Neutronul emis are desigur o energie mai joasă decît neutronul primar. Nucleul înmagazinează diferenţa de energie ca energie de excitare şi apoi o eliberează sub forma unei radiaţii gama. Deoarece acest tip de împrăştiere implică excitarea nucleului de pe un nivel energetic inferior pe unul superior şi deoarece diferenţa de energie între nivele în apropierea stării fundamentale este de ordinul a 0,1 MeV, procesul de împrăştiere neelastică este posibil numai pentru neutronii cu energii mai mari de 0,1 MeV. Majoritatea proceselor de împrăştiere în reactori au loc la energii sub această valoare şi, deci, împrăştierea neelastică joacă un rol minor în tehnologia reactorului. Ne vom ocupa în detaliu numai de împrăştierea elastică.

Se pot distinge două forme de împrăştiere elastică. Prima formă, împrăştierea de rezonanţă, este similară cu captura de rezonanţă. Neutronul intră în nucleu, cu condiţia ca energia sa să fie suficientă pentru a trece nucleul de la starea fundamentală la o stare excitată. Nucleul excitat emite apoi neutronul (sau un altul) folosind din nou energia sa de excitaţie, astfel încît energia cinetică a neutronului emis rămîne neschimbată şi deci ciocnirea este elastică.

În a doua formă de împrăştiere elastică, neutronul nu intră în nucleu deloc, ci este oarecum reflectat pe suprafaţă.

Dintre aceste două procese, cel de al doilea joacă un rol mult mai important.

După cum vom vedea, experienţa arată că împrăştierea neutronilor poate fi considerată o ciocnire elastică între două sfere.

3. Reactorul nuclear

Pînă acum au fost tratate reacţiile nucleare ce au loc într-un reactor nuclear. Vom explica pe scurt în acest paragraf anumite aspecte practice privind reactorii de fisiune.

a) *Reactorul cu apă sub presiune (R.A.P.)*

Fig. 1.8 arată schematic principiile unui reactor simplu, a reactorului cu apă sub presiune (R.A.P.).

Reactorul R.A.P. constă dintr-un vas de presiune umplut cu apă şi conţinînd elemente combustibile şi bare de control. Aparatura auxi-

Scanned with OKEN Scanner

liară este alcătuită dintr-un schimbător de căldură prin care este pompată apă după ce a fost încălzită în reactor, căldura astfel obținută fiind folosită pentru a produce vapori. După schimbătorul de căldură

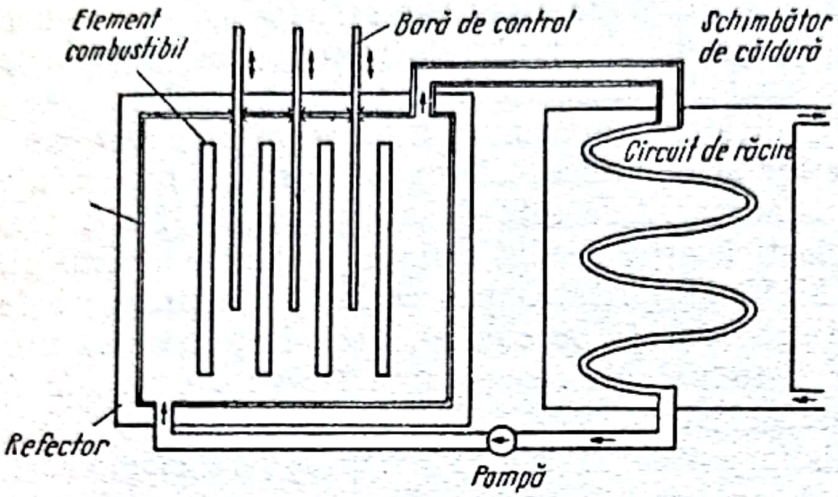


Fig. 1.8. Diagrama schematică a unui reactor cu apă sub presiune. În partea stîngă este vasul reactorului umplut cu apă, în dreapta schimbătorul de căldură în care sînt produși vaporii pentru turbină. Vasul reactorului conține elemente combustibile și bare verticale de control.

sau generatorul de vapori urmează instalația obișnuită a unei centrale energetice de care nu ne vom ocupa.

Combustibilul, uraniul, este introdus, sub formă de bare, în acest tip de reactor. În general, uraniul este folosit sub formă de metal, iar în ultima vreme sub formă de oxid sau carbură de uraniu. Barele de combustibil sînt introduse în teci metalice, de obicei de aluminiu, oțel sau metale similare. Tecile, așa-numite de protecție, reține produsele radioactive de fisiune din elementul combustibil. Produsele de fisiune reprezintă un pericol de iradiere pentru om și deci nu trebuie să se admită ca ele să contamineze circuitul de răcire cu apă, care necesită periodic intervenția omului pentru operații curente de întreținere. Aceste cerințe contradictorii trebuie să fie satisfăcute de un material de protecție care implică severe condiții tehnice. În primul rînd, acest material trebuie să fie rezistent din punct de vedere mecanic pînă la temperaturi foarte înalte și, în al doilea rînd, trebuie să permită ușor transferul de căldură între combustibil și apă. În al treilea rînd, el trebuie să fie stabil la iradiere intensă cu neutroni și, în al patrulea rînd, trebuie să absoarbă cît mai puțini neutroni. Pentru a îmbunătăți transferul de căldură, tecile sînt de obicei construite dintr-o rețea de nervuri pentru a crește suprafața efectivă de transfer al căldurii.

Scanned with OKEN Scanner

Neutronii de fisiune produși în interiorul elementelor combustibile nu sînt absorbiți pe loc, ci scapă în exteriorul tecii, deoarece vitezele lor sînt suficient de mari ca nu numai fisiunea, dar și captura de rezonanță să fie foarte puțin probabile. În plus, ei nu-și micșorează energia cinetică prin ciocniri cu nucleele grele de uraniu. De aceea, ei rămîn doar un timp în regiunea cu combustibil și trec prin teacă, ca neutroni rapizi, în apa înconjurătoare. Acolo ei vor fi încetiniți rapid prin ciocniri cu atomi ușori de hidrogen și oxigen, pe parcursul a cîțiva centimetri de moderator. Încetinirea continuă, natural, numai pînă cînd neutronii devin termici, adică au aceeași energie cinetică medie cu moleculele de apă.

Apa joacă un rol dublu, de agent de răcire al reactorului și de moderator în care neutronii de fisiune sînt încetiniți pînă la energii termice.

Neutronii termici, acum difuzează prin moderator pînă cînd, în final, ei reintră în combustibil. Acolo ei pot produce fisiune, fiind acum termici și astfel sînt produși noi neutroni, ca neutroni de fisiune și ciclul începe din nou.

Din păcate, ciclul neutronului nu este chiar atît de simplu cum a fost descris. O parte dintre neutroni sînt întîmplător pierduți. Imediat după ce au fost produși, neutronii de fisiune nu sînt în pericol de a fi capturați, atît timp cît rămîn în combustibil. În timpul procesului de încetinire în moderator, însă, unii dintre neutroni pot fi capturați sau de către atomii de moderator sau de către impuritățile din acesta, numite „otrăvuri". În al doilea rînd, se poate întîmpla ca în timpul încetinirii, un neutron să reintre în regiunea cu combustibil, ca neutron de rezonanță, el fiind capturat de un nucleu de U-238. În al treilea rînd, neutronul poate fi capturat în combustibil fără a produce fisiune, fie ca neutron de rezonanță, fie ca neutron termic. În al patrulea rînd, o parte a neutronilor va difuza în afara volumului reactorului. Pentru a reduce numărul de neutroni care scapă în afară, zona activă a reactorului, adică combustibilul, barele de control și moderatorul, sînt înconjurate de un *reflector*. Reflectorul este compus din același material ca și moderatorul, astfel că el va împrăștia neutronii dar nu-i va absorbi. El are rolul de a difuza înapoi către zona activă a reactorului neutronii care altfel ar scăpa în afară.

Componente foarte importante ale unui reactor sînt elementele lui de control, arătate în fig. 1.8 ca bare verticale de control cu un mecanism de acționare. Barele de control sînt făcute dintr-un material care absoarbe neutronii. Ele se introduc parțial în zona activă a reactorului și capacitatea lor de a absorbi neutronii depinde de adîncimea la care sînt introduse.

Scanned with OKEN Scanner

Rolul barelor de control este de a controla fluxul de neutroni în reactor şi prin aceasta, deşi indirect, puterea. Am văzut că la fiecare fisiune a unui nucleu de uraniu sînt eliberaţi 2—3 neutroni. Din aceştia, unii vor fi capturaţi în combustibil fără a produce fisiune, unii în moderator, unii vor părăsi zona activă a reactorului şi unii vor fi absorbiţi în barele de control. Unul din neutronii produşi la fisiune va fi necesar pentru a produce o nouă fisiune. Aceşti neutroni asigură funcţionarea în continuare a reactorului; dacă pentru acest scop ar rămîne disponibil mai puţin decît un neutron, reactorul s-ar opri după un timp şi dacă ar rămîne disponibil mai mult de un neutron, numărul reacţiilor ar creşte fără limită, adică temperatura ar creşte, ducînd într-un scurt timp la distrugerea reactorului. Pentru a ţine reactorul într-o stare staţionară este necesar să fie absorbiţi toţi neutronii în exces, cu excepţia celor necesari pentru menţinerea reacţiei. Rolul barelor de control este de a absorbi aceşti neutroni suplimentari. Adîncimea la care sînt introduse trebuie să fie reglată astfel încît în orice moment reactorul să fie într-o stare staţionară.

Durata de existenţă a unui neutron din momentul apariţiei lui ca neutron de fisiune, trecînd prin faza de încetinire şi pînă cînd este absorbit pentru a produce fisiunea, se numeşte *ciclu de viaţă al neutronului* şi suma acestor cicluri de viaţă neutronice se numeşte *reacţie în lanţ.*

Un reactor de tipul celui descris, în care combustibilul este separat de moderator, este numit *„reactor eterogen"*. Într-un reactor *omogen*, combustibilul şi moderatorul sînt amestecaţi uniform. Diferenţele dintre aceste două tipuri de reactori sînt esenţial de natură tehnologică. Din punct de vedere al bilanţului de neutroni, reactorul eterogen este întrucîtva superior reactorului omogen. De exemplu, este imposibil să se construiască un reactor omogen cu uraniu natural moderat cu grafit, deoarece fracţiunea de U^{235} fisionabil este insuficientă pentru a susţine o reacţie în lanţ. Se poate realiza, însă, un reactor eterogen cu uraniu natural moderat cu grafit.

Vedem că există trei factori de importanţă deosebită ce determină bilanţul de neutroni. Primul este suprafaţa reactorului, din cauza scurgerii de neutroni, al doilea este combustibilul, deoarece U^{238} capturează neutronii şi al treilea este moderatorul cu capacitatea lui de încetinire şi absorbţie. În legătură cu primul factor, este important a face raportul dintre suprafaţa şi volumul zonei active a reactorului cît mai mic posibil. Pe de altă parte, din motive tehnice şi economice este de dorit să se menţină reactorul la dimensiuni cît mai mici. Se poate spune că, cu cît bilanţul de neutroni este mai bun, cu atît volumul reactorului construit poate fi mai mic.

Scanned with OKEN Scanner

O cale de a micșora pierderile de neutroni este folosirea uraniului îmbogățit. Cu cît e mai mare cantitatea de U^{235} față de U^{238}, cu atît e mai mică probabilitatea ca neutronul să fie capturat la rezonanță în U^{238} în timpul încetinirii. Astfel, cu cît este mai mare îmbogățirea în U^{235}, cu atît pot fi mai mici dimensiunile reactorului construit. Din acest punct de vedere uraniul natural nu este cel mai bun combustibil.

În al treilea rînd, alegerea moderatorului este importantă pentru micșorarea pierderilor de neutroni. Cel mai bun moderator este apa grea (D_2O) care practic nu absoarbe neutroni și are excelente proprietăți de încetinire. Apa obișnuită (H_2O) este un încetinitor mai bun ca apa grea, dar ea este în schimb un absorbant puternic. Grafitul este un moderator inferior, dar are avantajul de a fi solid și de a nu-și modifica proprietățile cu temperatura.

În sfîrșit, bilanțul de neutroni este înrăutățit de otrăvuri, de materiale de reproducere și conversie.

Otrăvurile sînt absorbanți de neutroni în care neutronii sînt capturați în mod inutil. Ele sînt fie încorporate în reactor de la început sub formă de impurități, fie apar ca rezultat al funcționării reactorului, printre fragmentele de fisiune. Cu toate că combustibilul este reprocesat din timp în timp, otrăvurile se acumulează din nou în reactor. În unii reactori, îndepărtarea otrăvurilor din combustibil este un proces continuu, în alții el are loc după perioade fixate de timp. În ambele cazuri, reprocesarea combustibilului este complicată și costisitoare.

Ne-am întîlnit deja cu materiale de reproducere și conversie ca Th^{232} și U^{238}. Materialul reproducător este acela în care, ca rezultat al capturii unui neutron, combustibilul nou creat este același cu cel folosit în reactor. Astfel, thoriul este un material reproducător, dacă reactorul este încărcat cu U^{233}. Pe de altă parte U^{238} este un material de conversie dacă reactorul nu are drept combustibil Pu^{239} ci U^{235}. În acest caz materialul fisionabil creat diferă de combustibil. Introducerea toriului sau uraniului în reactor duce la crearea noului combustibil reproducător, respectiv convertor dar, în ambele cazuri, trebuie să se asigure un procent de neutroni disponibili în acest scop. Bilanțul de neutroni este înrăutățit dar se obține un nou combustibil. O măsură a cantității de combustibil cîștigat este așa-numitul *raport de reproducere sau conversie.*

b) *Reactorul cu apă fierbătoare (R.A.F.)*

Reactorul cu apă fierbătoare (R.A.F.) este foarte asemănător cu reactorul cu apă sub presiune. Generarea vaporilor are loc chiar în zona activă a R.A.F. și nu într-un generator separat de vapori ca în reac-

Scanned with OKEN Scanner

torul R.A.P. Acesta este deci mai simplu decît reactorul R.A.P. Se economisește un generator de vapori și nu e necesar să se lucreze la presiuni foarte mari, așa cum este cazul pentru reactorul cu apă sub presiune. Pe de altă parte, are și dezavantaje. Fără un generator de aburi separat sînt necesare precauții mai mari pentru a preveni contaminarea circuitului vaporilor cu produse radioactive de fisiune. Tecile elementelor combustibile nu sînt o protecție atît de sigură. Formarea bulelor de vapori la suprafața elementelor combustibile duce la o corodare accelerată a materialelor de întecuire. Un avantaj al R.A.F. este, totuși, autoreglarea nivelului puterii. Dacă temperatura în zona activă a reactorului crește peste normal, o cantitate mai mare de apă este transformată în vapori, conducînd la creșterea volumului bulelor de vapori. Deoarece apa acționează și ea ca moderator, micșorarea densității medii a moderatorului produce o încetinire a reacției în lanț, care persistă pînă ce zona activă a reactorului reintră în starea sa normală.

c) *Reactorul răcit cu gaz și moderat cu grafit*

Al treilea tip de reactor eterogen este reactorul de tip Calder Hall răcit cu gaz și moderat cu grafit. Reactorul Calder Hall are drept combustibil uraniu natural. Moderator este grafitul, iar agentul de răcire este bioxidul de carbon. Zona activă a reactorului constă dintr-un bloc cilindric de grafit, străbătut de canale în care sînt introduse elementele combustibile sub formă de bare. Gazul de răcire este pompat printr-un spațiu inelar în jurul fiecărei bare combustibile, preluînd căldura, care este apoi folosită într-un generator de aburi în exteriorul reactorului. Barele de control, reflectorul etc. sînt similare cu cele descrise la reactorul cu apă sub presiune. Reactorul răcit cu gaz este afectat mai puțin de coroziune, decît reactorii răciți cu lichid. În afară de ceasta, el poate permite, în general, temperaturi mai ridicate. (Din acest punct de vedere, bioxidul de carbon nu este un gaz foarte potrivit). Un dezavantaj este puterea mare consumată pentru circulația gazului, deoarece capacitatea de transfer a căldurii la gaz este inferioară față de lichide. În scopul de a prelua o cantitate suficientă de căldură, gazul de răcire trebuie circulat la viteze considerabile. În acest sens, bioxidul de carbon este un agent de răcire convenabil. Se folosește o presiune mare a gazului pentru a se mări cantitatea de căldură preluată de gazul circulant. Limita este impusă de rezistența la presiune a vasului. Trebuie adăugat că aceasta este afectată de dimensiunea mare a reactorilor răciți cu gaz. Consecința faptului că grafitul nu are proprietăți de moderare

Scanned with OKEN Scanner

prea bune este că zona activă a reactorului trebuie să fie foarte mare în scopul de a asigura o reacţie în lanţ. Este de menţionat că în cazul reactorului Calder Hall, uraniul natural conţinînd o proporţie însemnată de U^{238} nefisionabil, nu este un combustibil prea indicat. Diametrul reactorului Calder Hall este de aproximativ 10 m, în timp ce al unui reactor al cărui moderator este apa grea şi al cărui combustibil este uraniul natural este cam de patru ori mai mic.

d) *Reactorul omogen*

În categoria reactorilor omogeni intră reactorii omogeni cu apă (R.O.A.). În aceştia, uraniul puternic îmbogăţit este dizolvat în apă sub formă de sare. Apa, ca şi la R.A.P., poate acţiona atît ca moderator cît şi ca agent de răcire. Zona activă cu combustibil lichid este înconjurată de un reflector de grafit. Reactorul R.O.A. are avantajul unei structuri simple a zonei active şi accesibilă calculelor teoretice. El nu are elemente combustibile care cer să fie schimbate Containerul cu combustibil lichid este un vas conectat la circuitul de răcire. Mai mult, acest fel de reactor poate fi construit astfel încît el să fie autoreglabil pe acelaşi principiu cu R.A.F. Un control suplimentar poate fi obţinut într-un mod foarte simplu prin reglarea concentraţiei combustibilului lichid. Dezavantajul principal al acestui tip de reactor este coroziunea. În plus, apare descompunerea apei ca rezultat al iradierii, producînd un amestec exploziv de oxigen şi hidrogen. Trebuie luate măsuri de precauţie de prevenire a exploziei.

e) *Reactorul cu metal lichid*

În reactorul cu metal lichid este folosit bismutul ca mediu de transfer al căldurii, U^{233} sau U^{235} fiind dizolvat în concentraţie ridicată în bismut. Din păcate, numai concentraţii mici de uraniu pot fi dizolvate în bismut, chiar la temperaturi ridicate. Pentru a mări solubilitatea în bismut este necesar să se adauge plumb sau staniu. Evident materialul pentru circuitul bismutului ridică probleme tehnice la temperaturi ridicate. Dacă, totuşi, aceste dificultăţi sînt rezolvate, acest tip de reactor poate da o densitate mare de putere şi un raport bun de reproducere pentru U^{233}, reproducător fiind Th^{232}.

f) *Reactorul cu sodiu-grafit (R.S.G.)*

Folosirea sodiului ca agent de răcire într-un reactor este foarte avantajoasă deoarece este necesară o cantitate foarte mică. Datorită densităţii mari de putere specifică, reactorul sodiu-grafit este foarte conve-

Scanned with OKEN Scanner

Nr. crt		Combustibil	Material de reproducere	Moderator	Agent de răcire	Temperatura	Factor de reproducere sau conversie	Reglaj
1	Reactorul Calder Hall	Uraniu natural	U-238 (în U natural)	Grafit	CO_2	$<400°C$	Mijlociu	Bare de control
2	Reactor cu apă sub presiune (R.A.P.)	U-natural sau ușor îmbogățit (metalic sau oxid)	U-238 sau Th-232	D_2O sau H_2O	D_2O sau H_2O	$<350°C$	Mic sau mijlociu	Bare de control
3	Reactor cu apă fierbătoare (R.A.F.)	— „ —	— „ —	— „ —	— „ —	— „ —	— „ —	— „ —
4	Reactorul cu sodiu-grafit (R.S.G.)	Uraniu ușor îmbogățit (metalic)	U-238 sau Th-232	Grafit	sodiu	$<700°C$	mic	Bare de control
5	Reactor rapid reproducător	Pu-239 (metal?)	U-238 (în U-natural)	nu	sodiu sau bismut	$<700°C$	mare	reflector sau bare de control din U natural
6	Reactor omogen (R.O.A.)	Săruri de U sau UO_2 cu îmbogățire medie sau ridicată	Th-232	D_2O sau H_2O	D_2O sau H_2O	$<350°C$	mare	Control prin concentrația combustibilului
7	Reactor cu metal lichid	U puternic îmbogățit (metalic)	Th-232	Grafit sau Be	Bismut sau sodiu	$<700°C$	mijlociu sau ridicat	Control prin concentrația combustibilului
8	Reactor răcit cu gaz la temperatură ridicată, acționînd o turbină cu gaz	U îmbogățit ușor pînă la mediu sub formă de UO_2	U-238 sau Th-232	Grafit	CO_2 sau He	650°C	mic pînă la mediu	Bare de control
9	Reactor cu moderator compus organic	U îmbogățit ușor pînă îmbogățit (metal)	U-238 sau Th-232	Lichid organic	Lichid organic	350°C	mic pînă la mijlociu	Bare de control

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 1.1.

Întecuirea	Producerea combustibilului	Influența radiațiilor și coroziune	Implicații tehnice	Costul materialului	Siguranță în funcționare
aliaj Mg-Al (Magnox)	În exteriorul centralei de putere, relativ scump	Neglijabilă, nu	nu	Cost ridicat pt. U, grafit și agent de răcire	Stabilitate bună
Al, Zr, Fe	— „ —	Slabă, nu	nu	Cost ridicat pt. D_2O și vasul de presiune	— „ —
Al, Zr, Fe	— „ —	— „ —	— „ —	Cost ridicat pentru D_2O	— „ —
Fe, Zr	— „ —	ușoară coroziune și eroziune în circuitul sodiului	Creșterea densității grafitului și reducerea absorbției natriului în C	Cost relativ ridicat și circuit de răcire complicat	Activitate în circuitul primar de răcire
Fe, Zr	— „ —	Radiații periculoase coroziune și eroziune în circuitul de răcire	Cercetarea aliajelor de Pu și a agentului de răcire Na-Bi	Cost ridicat al combustibilului	Funcționarea la densități mari de putere nu este verificată
nu	În centrala de putere, relativ ieftin	Coroziune și eroziune în circuit	Se cer materiale rezistente la coroziune și separarea chimică a produselor de fisiune	—	Stabil
Zr, Fe	În centrala de putere, relativ ieftin	Slabă nu	Cercetări asupra metalelor lichide	Relativ scăzut	Foarte stabil
Zr, Fe	În exteriorul centralei de putere, relativ ieftin	Slabă nu	Cercetări asupra stabilității întecuirii	Relativ scăzut	Foarte stabil
Zr, Fe, Al	În exteriorul centralei de putere, relativ scump	Descompunerea moderatorului și polimerizare	nu	Relativ scăzut	Foarte stabil

Scanned with OKEN Scanner

nabil. Problema materialelor pare a fi totuşi foarte dificilă. Elementele combustibile sînt construite astfel încît combustibilul şi moderatorul sînt întecuite împreună în zirconiu. În afară de problemele coroziunii şi eroziunii în circuitul de răcire există o problemă specială, aceea a scurgerii sodiului în grafitul poros care duce la creşterea absorbţiei neutronilor în grafit. Această problemă este rezolvată prin folosirea unui grafit cu o densitate ridicată. Pompe electromagnetice speciale au fost construite pentru a pompa sodiu lichid.

Sodiul lichid devine foarte activ în reactor şi duce la o creştere a activităţii în circuitul primar de răcire. În cele mai multe cazuri este necesar să se includă un circuit cu sodiu secundar pentru a preveni contaminarea circuitului de vapori cu material radioactiv. Avînd aşa de multe circuite, este normal ca reactorul să fie scump. Viitorul va arăta dacă densitatea mare de putere justifică costul ridicat al reactorului cu sodiu-grafit.

g) *Reactorul cu moderatori organici*

Reactorul cu moderatori organici foloseşte combustibil metalic şi un lichid organic atît ca moderator cît şi ca agent de răcire. Agentul de răcire organic permite temperaturi de lucru relativ ridicate, 300—350°C, fără a fi nevoie să se folosească presiuni ridicate. Un dezavantaj al reactorilor de acest tip, printre altele, constă în faptul că substanţa organică se descompune prin iradiere şi trebuie continuu regenerată.

h) *Reactorul rapid reproducător*

Plutoniul-239 are un bilanţ superior de neutroni, faţă de celelalte materiale fisionabile, dacă se folosesc neutronii rapizi. Din această cauză apare promiţătoare pentru viitor construcţia aşa numitului „*reactor rapid*“ cu acest combustibil. Un astfel de reactor are capacitatea de a produce combustibil nou. Astăzi, problemele tehnologice nu sînt

Scanned with OKEN Scanner

rezolvate, deşi toate datele fizice cerute de reactorii rapizi sînt cunoscute. Plutoniul ca metal nu poate fi folosit deoarece are punctul de topire prea coborît. S-a sugerat deci, să se folosească plutoniul sub formă de metal lichid, combinînd funcţia de combustibil cu cea de agent de răcire. El trebuie, de asemenea combinat cu un alt metal astfel încît punctul de topire al soluţiei metalice să coboare. Problemele privind construirea unui reactor rapid reproducător includ principiile de bază ale tehnologiei materialelor.

Tabelul 1.1 conţine caracteristicile unui număr de reactori.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

TEORIA DIFUZIEI ŞI A ÎNCETINIRII

1. Secţiunea eficace

În primul capitol au fost examinate procesele nucleare care au loc într-un reactor, sub aspect calitativ şi ca procese individuale; în cele ce urmează aceste fenomene vor fi descrise din punct de vedere cantitativ şi macroscopic. Prin „macroscopic" înţelegem că în general nu vom mai considera un singur neutron sau atom ca mai înainte, ci un număr mare de neutroni interacţionînd cu mediul care îi conţine.

Secţiunea eficace a fost deja menţionată ca o măsură a probabilităţii de reacţie între un neutron şi un nucleu. Acest concept va fi definit acum mai precis.

Să considerăm o sursă punctiformă, constantă, de neutroni situată într-un material conţinînd atomi cu care neutronii interacţionează şi că densitatea este uniformă, astfel încît distanţa dintre atomi este constantă. Neutronii vor părăsi sursa în direcţii radiale, în linii drepte, pînă cînd ei vor ciocni un nucleu şi vor fi sau absorbiţi sau împrăştiaţi, conform probabilităţii relative a fiecărui tip de reacţie. Mai mult, aşa cum s-a arătat deja, neutronul nu trebuie să lovească direct nucleul pentru a reacţiona cu el. În general, este suficient dacă se apropie de el. Nucleul este înconjurat de un cîmp nuclear, care atrage sau, în mod alternativ, respinge neutronul, cînd acesta intră în zona sa de influenţă. Aria secţiunii transversale a acestui cîmp, care în general depinde de viteza neutronului (vezi paragraful 2.1 a şi b) este numită *secţiune eficace.*

Să calculăm acum distanţa medie pe care neutronii o pot parcurge în linie dreaptă de la sursă pînă la prima lor ciocnire cu un nucleu. Vom introduce o mărime ajutătoare, densitatea curentului de neutroni. Aceasta este numărul de neutroni ce traversează o suprafaţă de 1 cm^2 pe secundă, adică numărul de neutroni/$cm^2 \cdot s$.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că densitatea curentului de neutroni la distanța r de sursă (fig. 2.1) este $j'(r)$[1], astfel că numărul de neutroni ce traversează suprafața sferică, $4\pi r^2$, pe secundă este

$$4\pi r^2 j'(r). \tag{2.1}$$

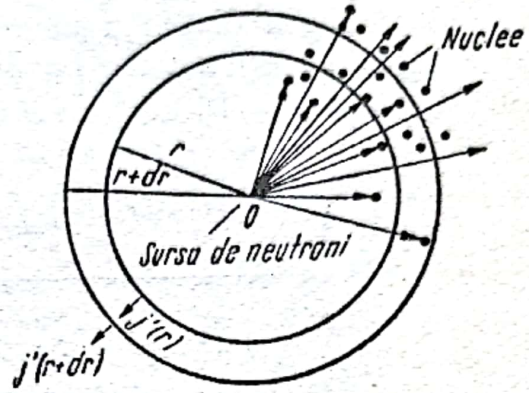


Fig. 2.1. Deducerea secțiunii eficace. Suprafețele concentrice $4\pi r^2$ și $4\pi(r+dr)^2$ mărginesc volumul $4\pi r^2 dr$. Sursa de neutroni este plasată în centru ($r=0$). Săgețile indică drumurile drepte parcurse de neutronii produși de sursă, punctele reprezintă nucleele cu care neutronii se ciocnesc.

Prin sfera de suprafață mai mare, $4\pi(r+dr)^2$, trec

$$4\pi(r+dr)^2 j'(r+dr) \tag{2.2}$$

neutroni pe secundă. Acest număr este ceva mai mic, deoarece în volumul $4\pi r^2 dr$ mărginit de suprafețele $4\pi r^2$ și $4\pi(r+dr)^2$ unii neutroni se ciocnesc cu nucleele și deci vor fi absorbiți sau împrăștiați. În ambele cazuri drumul lor drept de la sursă se termină în pătura sferică $4\pi r^2 dr$, și pe noi ne interesează numai acest drum drept al unui neutron pînă la prima lui ciocnire cu un nucleu. Dacă N este numărul atomilor absorbanți sau difuzanți din cm^3, atunci, conform definiției secțiunii eficace a unui singur atom, pe care o vom nota cu σ, numărul neutronilor ce suferă reacții într-o secundă în volumul $4\pi r^2 dr$ este

$$\sigma N j' 4\pi r^2 dr. \tag{2.3}$$

Acest număr trebuie să fie același cu diferența dintre numărul de neutroni ce intră în volumul $4\pi r^2 dr$ prin suprafața $4\pi r^2$ și a neutronilor ce părăsesc acest volum prin suprafața $4\pi(r+dr)^2$

$$4\pi r^2 j' - 4\pi(r+dr)^2(j'+dj') = \sigma N j' 4\pi r^2 dr \tag{2.4}$$

adică

$$\frac{d(r^2 j')}{dr} = -\sigma N r^2 j' \tag{2.4}$$

[1]) Acest j' nu trebuie confundat cu densitatea curentului de difuzie j care apare în paragraful 2.2.

sau integrînd,

$$j' = \frac{A}{r^2} \exp(-\sigma N r). \tag{2.5}$$

Aici A este o constantă de normare. Densitatea curentului de neutroni j' descreşte deci cu creşterea distanţei de la sursă.

Vom evalua acum distanţa medie parcursă de un neutron înainte de a se ciocni cu un nucleu. În baza metodei obişnuite de calcul a unei valori medii, aceasta este

$$\bar{r} = \frac{\int_0^\infty r \frac{A}{r^2} 4\pi r^2 \exp(-\sigma N r)\, dr}{\int_0^\infty \frac{A}{r^2} 4\pi r^2 \exp(-\sigma N r)\, dr} = \frac{\int_0^\infty r \exp(-\sigma N r)\, dr}{\int_0^\infty \exp(-\sigma N r)\, dr}, \tag{2.6}$$

Deoarece astfel de integrale apar frecvent în cele ce urmează, arătăm aici o cale simplă de calcul. Dacă scriem

$$f(\sigma N) = \int_0^\infty \exp(-\sigma N r)\, dr = \frac{1}{\sigma N}$$

atunci ecuaţia (2.6) poate fi scrisă

$$\bar{r} = \frac{-\frac{df}{d(\sigma N)}}{f} = \frac{\frac{1}{(\sigma N)^2}}{\frac{1}{\sigma N}} = \frac{1}{\sigma N}. \tag{2.7}$$

Lungimea $\bar{r} = 1/\sigma N$, distanţa pe care un neutron o parcurge în medie înainte de a suferi o reacţie nucleară, este numită *drum liber mijlociu* şi se notează cu

$$\lambda = \bar{r} = 1/\sigma N.$$

Drumul liber mijlociu este deci invers proporţional cu densitatea materialului şi secţiunea eficace.

Produsul $\sigma \cdot N$ este de asemenea o secţiune eficace şi cum N este numărul de atomi dintr-un cm³, el este secţiunea eficace a unui cm³ de substanţă. El este notat cu Σ. Secţiunea eficace σ a unui singur atom este numită *„secţiune eficace micro-*

scopică", iar Σ, care conține densitatea materialului, este numită „*secțiune eficace macroscopică*". Ele sînt legate prin relațiile

$$\lambda = \bar{r} = \frac{1}{\sigma N} = \frac{1}{\Sigma}. \tag{2.8}$$

Pentru fiecare tip de reacție nucleară corespund diferite valori ale drumului liber, ale secțiunilor eficace microscopice și macroscopice. Drumul liber de împrăștiere, de exemplu, este distanța pe care un neutron o parcurge între două ciocniri în nucleele de moderator etc. Pentru a preciza tipul fiecărei mărimi se folosesc indici. Astfel, de exemplu, σ_a este secțiunea eficace de absorbție microscopică, Σ_f este secțiunea eficace de fisiune macroscopică, λ_s este drumul liber de împrăștiere.

În amestecuri de materiale diferite, de exemplu cazul unui amestec combustibil-moderator, conceptul de „drum liber" în sensul strict al cuvîntului, își pierde sensul fizic. Cu toate acestea, în astfel de cazuri se utilizează adesea aceste cantități în calcule printr-o combinare potrivită pentru a indica probabilitățile diferitelor reacții. Astfel, de exemplu, într-un amestec combustibil-moderator, Σ_a/Σ_s este raportul neutronilor absorbiți la neutronii împrăștiați, în amestecul respectiv.

Densitatea curentului de neutroni j' este introdusă aici numai pentru a deduce valorile drumului liber și a secțiunii eficace macroscopice; astfel, j' nu este folosită în fizica reactorului, deși se folosește o mărime similară, fluxul de neutroni. El are aceleași dimensiuni ca și densitatea fluxului de neutroni j'. El măsoară, de asemenea numărul de neutroni care traversează o suprafață de 1 cm^2 într-o secundă, dar, spre deosebire de j', el nu are o direcție preferențială, ci este de natură pur statistică. Să considerăm un cm^3 dintr-un moderator ideal, în care nu este absorbit nici un neutron, ci sînt împrăștiați cu toții. Fie că moderatorul este în echilibru termic cu neutronii, astfel încît viteza neutronului este în medie constantă în timp. Fie n, numărul de neutroni conținuți într-un cm^3. Acești neutroni se mișcă haotic, în toate direcțiile, printre nucleele de moderator, avînd o viteză medie uniformă $\bar{v}$, de exemplu viteza termică. Fie σ_s secțiunea eficace de împrăștiere a nucleelor moderatorului, λ_s drumul liber de împrăștiere. Atunci, într-un model idealizat, fiecare neutron se va ciocni cu un nucleu de moderator, după un drum λ_s. Fie, $\tau = \lambda_s/\bar{v}$, timpul între două ciocniri. Numărul de ciocniri care au loc în fiecare secundă, într-un cm^3, este atunci

$$\frac{n}{\tau} = \frac{n\bar{v}}{\lambda_s} = n\bar{v}\Sigma_s. \tag{2.9}$$

Produsul $n\bar{v}$ este numit *flux de neutroni* Φ

$$\Phi = n\bar{v}. \tag{2.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Faptul că Φ nu are direcție preferențială, cum are de exemplu j', se datorește distribuției statistice a direcțiilor lui $\bar{v}$. Deoarece v este o constantă depinzînd numai de temperatura neutronilor, Φ este într-adevăr o măsură a numărului de neutroni liberi dintr-un cm^3.

Produsul $\Sigma_s \cdot \Phi$ sau mai simplu $\Sigma \cdot \Phi$ este o cantitate cu care ne vom întîlni adesea în cele ce urmează. Conform ecuației (2.9), el reprezintă

$$\Sigma \cdot \Phi = \text{numărul de reacții ale neutronilor pe centimetrul cub și secundă.} \tag{2.11}$$

Unitatea convențională folosită în fizica nucleară pentru măsurarea secțiunii eficace microscopice este barn-ul

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Secțiunea eficace macroscopică, care este evident inversul unei lungimi, se măsoară în cm^{-1}.

Secțiunile eficace microscopice au fost măsurate pentru aproape toate tipurile de atomi și publicate în tabele și grafice[1].

În general secțiunea eficace este dependentă de viteza neutronilor. Ne-am întîlnit deja cu această dependență la reacția de fisiune, la legea $1/v$ și la captura de rezonanță. De aceea, mărimile introduse mai sus sînt, în majoritate, dependente de energie, adică de viteză. Pe de altă parte, viteza neutronilor nu este uniformă; chiar în cazul neutronilor termici, care ne interesează în mod deosebit, viteza medie $\bar{v}$ este de fapt dependentă de temperatură, însă vitezele individuale sînt variabile, ceea ce ar corespunde aproximativ unei distribuții maxwelliene.

Dacă se ia în considerație distribuția energetică a neutronilor, atunci în locul ecuației (2.10), în care viteza este mediată, apare următoarea ecuație

$$\Phi = \int_0^\infty n(E)v(E)dE. \tag{2.12}$$

În această ecuație, $n(E)$ reprezintă acum densitatea de neutroni pe unitatea de energie, iar $n(E)dE$ este numărul de neutroni a căror energie este cuprinsă între E și $E+dE$, astfel încît $\int_0^\infty n(E)dE = n$. Dacă ecuația (2.12) este folosită pentru neutroni termici, atunci limita superioară a integralei trebuie să fie energia de prag a neutronilor termici. De fapt, contribuția neutronilor cu energii mai mari decît energia ter-

[1] Donald J. Hughes, John A. Harvey, *Secțiuni eficace neutronice*, Laboratorul Național Brookhaven Upton, New-York, iulie 1955.

Scanned with OKEN Scanner

mică la integrală, este atît de mică încît se poate lua limita superioară infinit, fără a se face o eroare prea mare.

Avînd definit un număr de neutroni pe unitatea de energie, aceştia corespund unui flux de neutroni per unitatea de energie, conform ecuaţiei (2.10)

$$n(E)\bar{v}(E)=\varphi(E) \tag{2.13}$$

astfel că $\Sigma(E)\varphi(E)\mathrm{d}E$ este numărul de reacţii pe cm^3 şi pe secundă produse de neutronii ale căror energii sînt cuprinse în intervalul E şi $E+\mathrm{d}E$

$$\Sigma(E)\varphi(E)\mathrm{d}E = \begin{array}{l}\text{numărul de reacţii ale neutronilor}\\ \text{pe } \mathrm{cm}^3 \text{ şi pe secundă în intervalul}\\ \text{de energii } E \text{ şi } E+\mathrm{d}E.\end{array} \tag{2.14}$$

Astfel

$$\Phi=\int_0^\infty \varphi(E)\mathrm{d}E. \tag{2.15}$$

Secţiunea eficace medie macroscopică, devine

$$\bar{\Sigma}=\frac{\int_0^\infty \Sigma(E)\varphi(E)\mathrm{d}E}{\int_0^\infty \varphi(E)\mathrm{d}E}. \tag{2.16}$$

Drumul liber mijlociu

$$\bar{\lambda}=\frac{\int_0^\infty \lambda(E)\varphi(E)\mathrm{d}E}{\int_0^\infty \varphi(E)\mathrm{d}E} \tag{2.17}$$

şi secţiunea eficace medie microscopică

$$\bar{\sigma}=\frac{\int_0^\infty \sigma(E)\varphi(E)\mathrm{d}E}{\int_0^\infty \varphi(E)\mathrm{d}E}. \tag{2.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Secţiunile eficace de absorbţie arată o dependenţă de energie foarte puternică. Am văzut un exemplu în fig. 1.5. Neutronii pot fi împărţiţi în 3 regiuni, în conformitate cu tipul de absorbţie. Neutronii lenţi se află în regiunea termică, se supun legii $1/v$ şi produc fisiune. Secţiunea eficace de absorbţie scade cu creşterea energiei. Regiunea următoare este regiunea neutronilor de rezonanţă în care apar picurile de rezonanţă pentru majoritatea atomilor folosiţi în tehnologia reactorului. Regiunea de rezonanţă se află la energii joase în comparaţie cu energia neutronilor de fisiune. Deasupra regiunii de rezonanţă secţiunea eficace de absorbţie scade constant cu energia pînă cînd se ajunge la energia neutronilor de fisiune.

Secţiunea eficace de fisiune joacă un rol important în reactorii termici numai în regiunea energiilor termice. Acolo ea ascultă de legea $1/v$.

Secţiunile eficace de împrăştiere a atomilor sînt practic independente de energie şi sînt de ordinul de mărime al ariei secţiunii transversale a nucleelor atomice.

2. Ecuaţia difuziei pentru neutronii termici

În difuzia neutronilor se disting două cazuri: difuzia neutronilor rapizi în timpul procesului de încetinire şi cea a neutronilor termici. O teorie care să descrie procesul de difuzie în mod satisfăcător există numai pentru neutronii termici. Aceasta deoarece neutronii termici au în medie o viteză uniformă, în timp ce neutronii în regiunea de încetinire îşi schimbă în mod continuu viteza. Descrierea matematică a procesului de difuzie este simplă numai cînd constanta de difuzie este în realitate constantă şi nu depinde de energie, aşa cum se întîmplă în regiunea de încetinire a neutronilor. O metodă de descriere a difuziei neutronilor în regiunea de încetinire se găseşte în paragraful 2.5. Această teorie aparţine lui Fermi şi datorită simplităţii sale este cea mai bună pe care o avem în prezent, chiar dacă ipotezele simplificatoare făcute nu corespund întotdeauna cu comportarea reală a neutronilor şi deci precizia, în multe cazuri, nu e suficientă. Ecuaţia de difuzie a neutronilor termici împreună cu teoria de încetinire a lui Fermi este numită „*teoria monogrupală*“. Teoria este monogrupală, deoarece se tratează numai difuzia neutronilor cu un grup de energii, şi anume neutronii termici. Se consideră neutronii din regiunea de încetinire, deoarece ei sînt sursa de neutroni termici. În teoria multigrupală, care este tratată în paragraful 5, neutronii din regiunea de încetinire sînt, de asemenea, împărţiţi în mai

Scanned with OKEN Scanner

multe grupuri de energii în care se consideră că neutronii au aceeași energie. Grupurile individuale sînt atunci cuplate împreună prin termeni de sursă care corespund trecerii neutronilor din grupul de energie înaltă în grupul de energie mai joasă.

În acest paragraf ne propunem să discutăm teoria monogrupală și să stabilim o ecuație pentru neutronii termici care să exprime condiția de echilibru între sursa de neutroni, respectiv numărul de neutroni pe secundă ce intră în regiunea de energie termică din regiunea de încetinire, neutronii absorbiți în reactor și neutronii termici ce părăsesc reactorul prin pereți.

În scopul de a găsi ecuația de difuzie, pentru neutronii termici, să considerăm un element de volum, de dimensiuni dx, dy, și dz (fig. 2.2) din interiorul reactorului. Pentru simplitate, vom considera cazul unui reactor omogen în care moderatorul și uraniul sînt amestecați uniform în elementul de volum $dx\,dy\,dz$, ipoteză care mai tîrziu va fi părăsită.

Ne interesează aici variația în timp a numărului de neutroni în elementul de volum $dx\,dy\,dz$. Există trei cauze ca acest număr să se modifice: în primul rînd, în volumul considerat neutronii sînt absorbiți atît de moderator cît și de combustibil; în al doilea rînd, fiecare fisiune a unui atom de uraniu produce noi neutroni, care devin termici prin procesul de încetinire în moderatorul din volumul considerat; în al

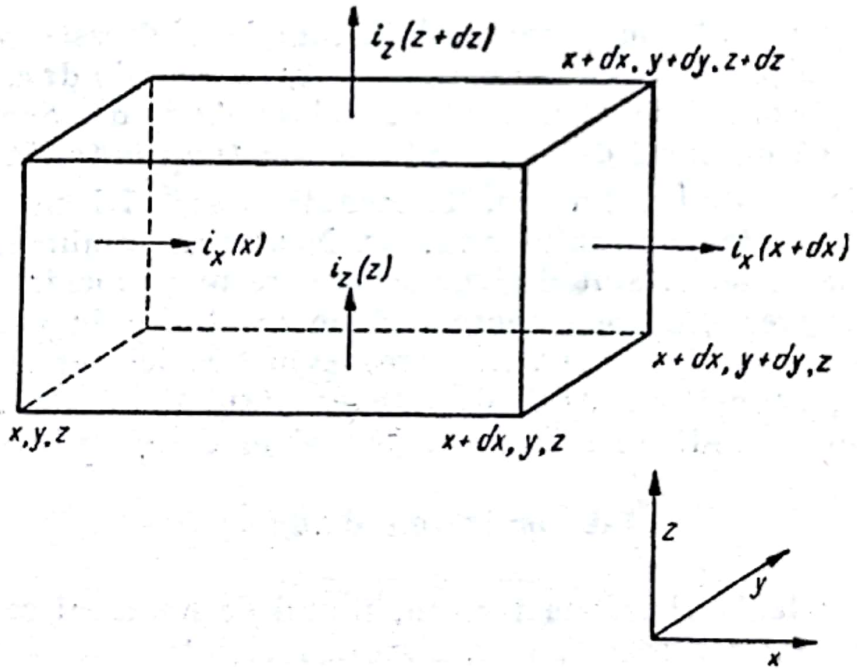


Fig. 2.2. Deducerea ecuației de difuzie în coordonate carteziene.

treilea rînd, neutronii ies și intră prin suprafețele laterale ale elementului de volum considerat. Să dăm mai jos o formulă matematică a acestor trei procese.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă n este numărul de neutroni din cm³ atunci $n\,dx\,dy\,dz$ este numărul de neutroni din elementul de volum $dx\,dy\,dz$. $\frac{\partial n}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$ este atunci variația în timp a numărului de neutroni din volumul $dx\,dy\,dz$. Să împărțim acest număr în trei, conform celor spuse mai înainte

$$\frac{\partial n}{\partial t}\,dx\,dy\,dz=\left[\frac{\partial n_a}{\partial t}+\frac{\partial n_q}{\partial t}+\frac{\partial n_D}{\partial t}\right]dx\,dy\,dz. \tag{2.19}$$

Aici $\frac{\partial n_a}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$ reprezintă numărul de neutroni, într-o secundă, ce dispar în volumul $dx\,dy\,dz$ prin absorbție, $\frac{\partial n_q}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$ este numărul de neutroni ce devin termici într-o secundă, în volumul $dx\,dy\,dz$ prin procesul de încetinire și $\frac{\partial n_D}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$ numărul de neutroni ce părăsesc sau intră prin difuzie în suprafețele laterale ale elementului de volum $dx\,dy\,dz$ considerat.

Pentru primul grup de neutroni, se poate scrie imediat

$$\frac{\partial n_a}{\partial t}\,dx\,dy\,dz=-dx\,dy\,dz\,\Sigma_a\Phi \tag{2.20}$$

conform celor arătate în paragraful 2.1, unde $\Sigma_a\Phi$ este numărul de neutroni absorbiți pe secundă în cm³, astfel că $\Sigma_a\Phi dx\,dy\,dz$ este numărul de neutroni absorbiți în elementul de volum $dx\,dy\,dz$. Semnul minus indică faptul că numărul de neutroni scade în timp datorită absorbției.

Putem da al doilea termen, termenul sursă, aici numai formal. El va fi explicat în paragraful următor. Neutronii ce alimentează grupul de energie termică, sînt desigur aceia care prin ciocniri cu nucleele de moderator trec din zona energetică de încetinire în zona termică. Dacă notăm numărul de neutroni care devin termici per cm³ și pe secundă cu q_{th}, atunci $q_{th}\,dx\,dy\,dz$ este numărul de neutroni ce devin termici într-o secundă în elementul de volum $dx\,dy\,dz$

$$\frac{\partial n_q}{\partial t}\,dx\,dy\,dz=q_{th}\,dx\,dy\,dz. \tag{2.21}$$

Pentru a calcula al treilea termen, fluxul de neutroni ce intră și ce iese din volumul considerat, vom discuta mai întîi o altă mărime, al treilea tip de flux de neutroni, pe care îl vom nota cu $\vec{j}$. $\vec{j}$ este densitatea curentului de difuzie. Spre deosebire de fluxul Φ, această mărime are o direcție preferențială și este întrucîtva diferită fizic de fluxul de neutroni. Numai dimensiunile, neutroni pe cm² și pe secundă sînt comune pentru ambele mărimi.

Scanned with OKEN Scanner

Este de presupus că densitatea de neutroni este ceva mai mare în elementul de volum $dx\,dy\,dz$ decît în jurul acestuia, deoarece am presupus existența unei surse de neutroni în interiorul volumului $dx\,dy\,dz$. Difuzia neutronilor în reactor este un proces statistic care tinde să uniformizeze distribuția neutronilor. Neutronii difuzează din regiunile cu densitate ridicată către acelea cu densitate mai mică. În acest caz vor ieși mai mulți neutroni din volumul $dx\,dy\,dz$ decît vor intra prin suprafețele laterale ale acestuia. Ca o măsură a acestei tendințe, se introduce densitatea curentului de difuzie $\vec{j}$; $\vec{j}$ este numărul mediu de neutroni ce trec efectiv printr-o suprafață de 1 cm², în fiecare secundă. Aici, planul suprafeței considerate este normal la direcția curentului de difuzie. Trecere efectivă înseamnă mai mulți neutroni într-un sens al normalei la plan (normala pozitivă) decît în cealaltă. Densitatea curentului de difuzie este un vector: el are o direcție. Este adevărat că neutronii se mișcă dezordonat, printre nucleele de moderator și de combustibil, dar ele se mișcă în medie, pe o direcție preferențială, care în cazul sursei de neutroni punctuale este radială în sensul îndepărtării de sursă.

Să considerăm acum fig. 2.2, în care este reprezentat elementul de volum $dx\,dy\,dz$ și care indică numărul de neutroni ce trec într-o secundă prin cele 6 fețe ale paralelipipedului. Să considerăm pentru început cele două plane opuse ale căror normale sînt în direcția x.

Fie j_x componenta densității medii a curentului de difuzie a neutronilor $\vec{j}$ în direcția x. Atunci, numărul de neutroni ce intră într-o secundă în paralelipipedul considerat prin suprafața din stînga de coordonată x, este $j_x(x)dy\,dz$. În partea dreaptă, prin planul de coordonată $x+dx$, ies $j_x(x+dx)dy\,dz$ neutroni. La fel se poate raționa pentru celelalte două perechi de plane. Însumînd numărul de neutroni ce intră sau ies prin suprafețele paralelipipedului se obține variația numărului de neutroni ce rămîn în paralelipipedul $dx\,dy\,dz$ într-o secundă

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_D}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = &-[j_x(x+dx)-j_x(x)]\,dy\,dz\\ &-[j_y(y+dy)-j_y(y)]\,dx\,dz\\ &-[j_z(z+dz)-j_z(z)]\,dx\,dy\end{aligned} \tag{2.22}$$

au, împărțind prin $dx\,dy\,dz$, calculînd limita expresiei de mai sus și nmulțind din nou cu $dx\,dy\,dz$ obținem

$$\frac{\partial n_D}{\partial t}\,dx\,dy\,dz = -\left[\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz. \tag{2.23}$$

Scanned with OKEN Scanner

În această ecuație, putem să înlocuim din nou densitatea curentului de neutroni j cu fluxul de neutroni Φ. Legătura dintre aceste două cantități este

$$D\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-j_x;\quad D\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-j_y;\quad D\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-j_z \tag{2.24}$$

D fiind constanta de difuzie. Ecuația (2.24) stabilește că densitatea fluxului de neutroni j este proporțională cu gradientul densității de neutroni. Pentru a nu întrerupe calculul în acest punct, vom deduce ecuația (2.24) mai tîrziu, în paragraful 2.6.

Înlocuind expresiile (2.24) în ecuația (2.23) și adunînd membru cu membru ecuațiile (2.20), (2.21) și (2.23), obținem

$$\frac{\partial n}{\partial t}\,dx\,dy\,dz=\left[\frac{\partial n_D}{\partial t}+\frac{\partial n_a}{\partial t}+\frac{\partial n_q}{\partial t}\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=\left[D\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)-\Sigma_a\Phi+q_{th}\right]dx\,dy\,dz$$

sau, împărțind prin volumul elementului considerat $dx\,dy\,dz$ și scriind

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\nabla^2\Phi \tag{2.25}$$

în care

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

obținem în final

$$D\nabla^2\Phi-\Sigma_a\Phi+q_{th}\equiv\frac{\partial n}{\partial t}. \tag{2.26}$$

Ecuația (2.26) este forma generală a ecuației de difuzie pentru neutronii termici. Operatorul ∇^2 folosit aici poate avea diferite forme, în concordanță cu geometria reactorului. Forma lui ∇^2 din (2.25) este potrivită pentru un reactor paralelipipedic. Din diferite motive, totuși, aceasta nu este o formă prea obișnuită. Mult mai des, mai ales pentru scopuri de calcul, avem de-a face cu reactori sferici sau, și mai des, cu reactori cilindrici. Prin urmare, vom calcula operatorul ∇^2 și pentru cazul simetriei sferice: simetrie sferică înseamnă aici că în reactorul sferic, curentul de difuzie al neutronilor j are numai direcția radială.

Scanned with OKEN Scanner

Să luăm acum ca element de volum, regiunea dintre două suprafețe sferice cu razele r și $r+dr$ (fig. 2.3). Volumul pentru un dr foarte mic este $4\pi r^2 \cdot dr$. Ecuațiile (2.20) și (2.21) devin în acest caz

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} 4\pi r^2 dr = -1\pi r^2 dr\, \Sigma_a \Phi \qquad (2.27)$$

$$\frac{\partial n_q}{\partial t} 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 dr\, q_{th}. \qquad (2.28)$$

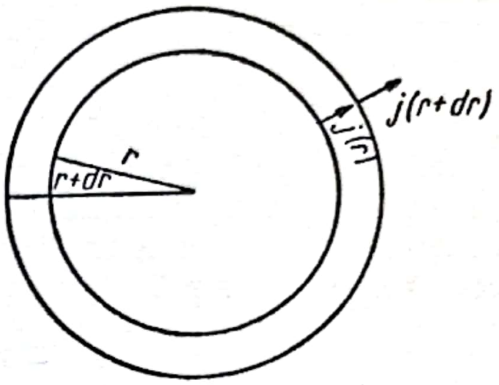


Fig. 2.3. Ecuația de difuzie în coordonate sferice.

Din suprafața interioară celor două suprafețe sferice, neutronii $j(r)4\pi r^2$ intră în elementul de volum și neutronii $j(r+dr)4\pi(r+dr)^2$ ies prin suprafața exterioară. Astfel, schimbarea numărului de neutroni în elementul de volum considerat, produsă prin intrarea și ieșirea fluxului, este

$$4\pi r^2\, dr \frac{\partial n_D}{\partial t} = -j(r+dr) \cdot 4\pi(r+dr)^2 - j(r)4\pi r^2$$

sau

$$4\pi r^2\, dr \frac{\partial n_D}{\partial t} = -4\pi r^2\, dr \frac{j(r+dr)(r+dr)^2 - j(r)\, r^2}{r^2 dr}.$$

La limită se obține

$$4\pi r^2\, dr \frac{\partial n_D}{\partial t} = -4\pi r^2\, dr \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 j}{\partial r}.$$

Conform cazului precedent, avem $j = -D \frac{\partial \Phi}{\partial r}$ și deci

$$4\pi r^2 dr \frac{\partial n_D}{\partial t} = -4\pi r^2\, dr \cdot \frac{D}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)}{\partial r} =$$

$$= -1\pi r^2\, dr \cdot D \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right). \qquad (2.29)$$

Adunînd (2.27), (2.28) și (2.29) și împărțind prin $4\pi r^2\, dr$ se obține ecuația de difuzie pentru cazul simetriei sferice

$$D\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \Sigma_a \Phi + q_{th} = \frac{\partial n}{\partial t},$$

Astfel, operatorul ∇^2 este aici

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \qquad (2.30)$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom trece peste deducerea operatorului ∇^2 pentru cazul simetriei cilindrice. El este analog cu celelalte două cazuri anterioare, cu singura deosebire că trebuie să considerăm un element de volum cilindric. Rezultatul este

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.31}$$

în care z este coordonata în direcţia axei iar r este perpendiculară pe ea.

Să considerăm această ecuaţie ceva mai în detaliu. Să presupunem că reactorul este în regim staţionar, adică comportarea sa nu se schimbă în timp. În acest caz, $\partial n/\partial t = 0$, adică densitatea neutronilor este constantă în timp în întreg reactorul. Atunci,

$$D\nabla^2\Phi - \Sigma_a\Phi + q_{th} = 0. \tag{2.32}$$

Să integrăm această ecuaţie peste întreg volumul V al reactorului, format din combustibil şi moderator

$$D\int_V \nabla^2\Phi\,dV - \Sigma_a\int_V \Phi\,dV + \int_V q_{th}\,dV = 0. \tag{2.33}$$

Să schimbăm primul termen considerînd cazul unui reactor paralelipipedic, unde

$$-D\nabla^2\Phi = -D\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}.$$

Primul termen din ecuaţia (2.33), dacă x_1, y_1, z_1 sînt dimensiunile reactorului, este

$$D\int_V \nabla^2\Phi\,dV = \int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1} \frac{\partial j_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1} \frac{\partial j_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz + \int_0^{x_1}\int_0^{y_1}\int_0^{z_1} \frac{\partial j_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{y_1}\int_0^{z_1} [j_x(x_1) - j_x(0)]\,dy\,dz + \int_0^{x_1}\int_0^{z_1} [j_y(y_1) - j(0)]\,dx\,dz +$$

$$+ \int_0^{x_1}\int_0^{y_1} [j_z(z_1) - 0)]\,dx\,dy.$$

j fiind densitatea curentului de difuzie a neutronilor, $\int_0^{y_1}\int_0^{z_1} [(j_x(x_1) - j_x(0)]\,dy\,dz$ este numărul de neutroni care se scurge în afară într-o secundă prin doi pereţi opuşi ai reactorului, ale căror normale sînt pe direcţia axei x. Rezultate asemănătoare se obţin şi

pentru alte perechi care plane de mărginesc reactorul, astfel că integrala $D\int_v \nabla^2\Phi dV$ reprezintă numărul neutronilor care se scurg prin pereții reactorului în fiecare secundă. Această concluzie este general valabilă și nu depinde de forma reactorului.

În relația (2.33) primul termen dă numărul de neutroni ce părăsesc reactorul în fiecare secundă, prin pereții săi, al doilea dă numărul de neutroni absorbiți într-o secundă în întreg reactorul și al treilea dă numărul de neutroni ce devin termici, pe secundă. Ecuația (2.33) sau respectiv (2.32) reprezintă condiția ca reactorul să funcționeze în regim staționar, ceea ce înseamnă că numărul de noi neutroni termici este exact egal cu numărul de neutroni absorbiți în volumul reactorului plus numărul de neutroni ce se scurg în exteriorul reactorului.

Deoarece primul termen din (2.33) crește cu aria laterală, iar ceilalți doi cu volumul reactorului, se vede din nou că la construirea reactorului trebuie să fim foarte atenți pentru a realiza un raport cît mai mic posibil între suprafață și volum. Din acest punct de vedere, forma ideală a reactorului este forma sferică. Sfera, totuși, prezintă o serie de inconveniente practice. Cu toate acestea, întotdeauna, se încearcă apropierea de forma sferică cît mai mult posibil. O formă de reactor foarte des întîlnită este cilindrul cu înălțimea aproximativ egală cu diametrul, așa-numitul *cilindru cubic.*

Ne-am ocupat pînă acum numai de forma reactorului, dar necesitatea ca raportul dintre suprafață și volum să fie cît mai mic posibil are implicații și asupra dimensiunilor. Aceasta înseamnă că, deoarece suprafața crește cu puterea a doua iar volumul cu puterea a treia a diametrului, cu cît reactorul este mai mare, cu atît mai puțini neutroni se scurg prin pereți, comparativ cu numărul celor produși în reactor. Totuși, dimensiunile reactorului sînt desigur limitate din considerente economice.

Interpretarea fiecărui termen din relația (2.33), aplicată corespunzător la relația (2.32), în care fiecare termen se referă la 1 cm^3, este aceeași în fiecare punct din interiorul reactorului. Primul termen dă numărul de neutroni ce părăsesc 1 cm^3, al doilea numărul de neutroni ce sînt absorbiți în același cm^3 și al treilea numărul de neutroni ce devin termici în cm^3 considerat.

Termenul sursă q_{th} va fi tratat mai amănunțit în paragraful 2.5. Totuși, trebuie spus de pe acum că el conține fluxul de neutroni Φ, ca factor. Aceasta este important, deoarece în aceste condiții ecuația 2.32 devine omogenă și deci, mai ușor de rezolvat. Dacă se dă factor comun Φ la ultimii doi termeni și se împarte ecuația cu D, constanta de difuzie, ecuația se poate scrie

$$\nabla^2\Phi + B^2\Phi = 0 \qquad (2.34)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde B, aşa-numitul factor *buckling*[1]), este o constantă a cărei mărime depinde de condiţiile la marginea zonei active a reactorului, adică în general de dimensiunea zonei active. B este deci un factor geometric al zonei active a reactorului.

Am presupus la început că materialul din care e făcut reactorul este un amestec omogen de combustibil şi moderator. Această ipoteză nu trebuie să fie îndeplinită cu stricteţe. Într-un reactor eterogen, în care combustibilul este separat de moderator, ca în reactorul cu apă sub presiune descris în primul capitol, teoria difuziei neutronilor termici adoptată de noi este uşor aplicabilă, cu condiţia ca dimensiunile reţelei regiunii cu combustibil, aşa numitul pas al reţelei, să fie mic în comparaţie cu dimensiunile zonei active.

Reactorul eterogen va fi descris mai tîrziu. Teoria difuziei descrisă aici se referă desigur numai la acea parte a reactorului care conţine moderatorul şi combustibilul, respectiv zona activă a reactorului. Neutronii care rămîn în afara zonei active pot fi, de asemenea, studiaţi cu ajutorul teoriei difuziei, dar cu constante diferite. Vom întîlni un exemplu, cînd ne vom ocupa de reflector.

3. Încetinirea neutronului ca un proces singular

În teoria difuziei neutronilor termici, rămîne deschisă numai problema termenului sursă, q_{th}. Această mărime este legată de regiunea cu energie mai mare decît energia termică, adică aproximativ între 0,1 eV şi 20 MeV. Aceasta este regiunea energetică în care neutronii de fisiune care apar cu energia medie de 1—2 MeV sînt încetiniţi prin ciocniri cu nuclee de moderator, pînă la energii între 0,01 eV şi 0,1 eV şi folosiţi apoi ca neutroni termici pentru fisiunea uraniului. În scopul de a găsi valoarea termenului sursă q_{th} pentru neutronii termici, va trebui mai întîi să descriem procesele implicate în ciocnirile individuale între neutroni şi nucleele împrăştietoare (de moderator).

Să considerăm energia transmisă de un singur neutron unui nucleu de moderator şi să presupunem că înainte de ciocnirea cu neutronul, nucleul a fost în repaus. Fie că neutronul se îndreaptă cu viteza $\vec{v}_{n0}$ către nucleu. În momentul ciocnirii el transferă o parte din impulsul său nucleului şi după ciocnire pleacă în general în altă direcţie, cu o viteză $\vec{v}_{n1}$. Nucleul a fost pus în mişcare prin ciocnire şi pleacă cu o

[1]) Termenul consacrat în l. română este *factor geometric (de formă)* (N.T.).

viteză $\vec{v}_{k1}$. Pentru mai multă claritate vitezele au fost scrise aici sub formă de vector. Procesul de ciocnire descris mai sus este arătat în fig. 2.4. Scopul nostru acum este de a calcula raportul dintre viteza neu-

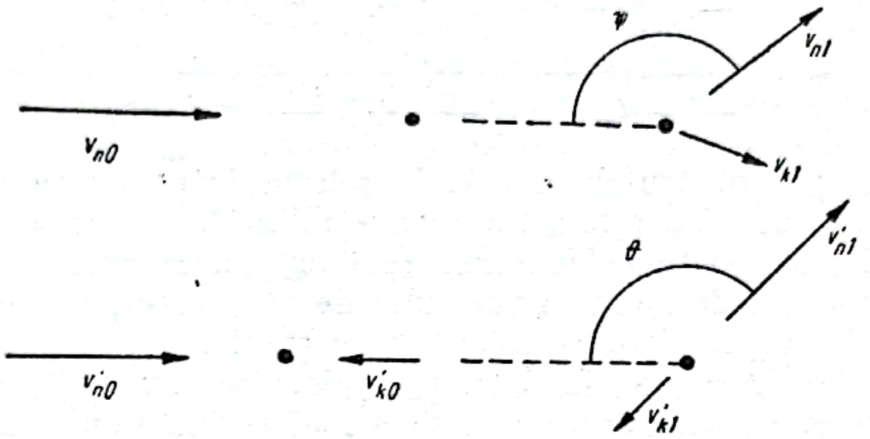


Fig. 2.4. Vectorii viteză ai neutronului şi nucleului de moderator; în stînga, înainte de ciocnire, în dreapta după ciocnire. Sus, în sistemul laboratorului, jos în sistemul centrului de masă. Punctul dintre vectori arată punctul de ciocnire.

tronului înainte de ciocnire şi viteza sa după ciocnire. Pentru aceasta apelăm la legile de conservare a impulsului şi energiei. Prima lege spune că impulsul înainte de ciocnire este egal cu suma impulsurilor după ciocnire. Să considerăm masa particulelor ce se ciocnesc egală cu numărul lor de masă, astfel că neutronul are masa 1 şi moderatorul numărul de masă A; atunci legea de conservare a impulsului dă

$$\vec{v}_{n0} = \vec{v}_{n1} + A\vec{v}_{k1}. \tag{2.35}$$

În partea stîngă a ecuaţiei este impulsul înainte de ciocnire, iar în partea dreaptă după ciocnire. Viteza $\vec{v}_{k0}$ nu apare, deoarece s-a presupus că nucleul este în repaus înainte de ciocnire.

Legea de conservare a energiei în cazul ciocnirii elastice, spune că energia cinetică înainte de ciocnire trebuie să fie egală cu energia cinetică după ciocnire, adică:

$$\frac{1}{2}\vec{v}_{n0}^{\,2} = \frac{1}{2}\vec{v}_{n1}^{\,2} + \frac{A}{2}\vec{v}_{k1}^{\,2}. \tag{2.36}$$

Dacă separăm pe $\vec{v}_{k1}$ în ecuaţia (2.35), o ridicăm apoi la pătrat şi introducem valoarea lui $\vec{v}_{k1}$ în (2.36), obţinem

$$(A-1)\vec{v}_{n0}^{\,2} - (A+1)\vec{v}_{n1}^{\,2} + 2(\vec{v}_{n0}\cdot\vec{v}_{n1}) = 0. \tag{2.37}$$

Aici, $(\vec{v}_{n0} \cdot \vec{v}_{n1}) = v_{n0} \cdot v_{n1} \cdot \cos \psi$ este produsul scalar al vectorilor $\vec{v}_{n0}$ și $\vec{v}_{n1}$, v_{n0} și v_{n1} sînt valorile lor, iar ψ unghiul dintre ei. Dacă transcriem (2.37), scalar, avem

$$(A-1)v_{n0}^2-(A+1)v_{n1}^2+2v_{n0}v_{n1}\cos\psi=0$$

sau

$$(A-1)-(A+1)\left(\frac{v_{n1}}{v_{n0}}\right)^2+2\frac{v_{n1}}{v_{n0}}\cos\psi=0. \qquad (2.38)$$

Astfel, scopul nostru de a calcula relația între viteza neutronului înainte și după ciocnire este acum realizat: din (2.38), care este o ecuație de gradul II, se poate calcula raportul v_{n1}/v_{n0}. Raportul depinde nu numai de numărul de masă al nucleului de moderator, ci, de asemenea, de unghiul de împrăștiere ψ, adică de unghiul cu care neutronul este deviat față de direcția sa inițială, prin ciocnirea cu nucleul.

Din motive, pe care le vom explica mai tîrziu, punem acum ecuația (2.38) într-o formă puțin diferită. Aceasta, deoarece ne trebuie raportul vitezelor, nu numai ca funcție de unghiul de deviație într-un sistem static de coordonate, ci de asemenea, ca funcție de unghiul de deviere într-un sistem mobil, așa numitul sistem al centrului de masă.

La deducerea ecuației (2.36) am presupus că, înainte de a fi lovit de neutron, nucleul de moderator a fost în repaus, adică a avut o viteză $\vec{v}_{k0}=0$. Toate vitezele date au fost măsurate într-un sistem de coordonate în repaus față de nucleele de moderator. Pentru un astfel de sistem static de coordonate s-a adoptat denumirea de „sistem al laboratorului". Cantitățile v_{n0}, v_{n1}, ψ în (2.38) se referă deci la sistemul laboratorului.

În principiu, totuși, orice alt sistem, chiar un sistem de coordonate mobil, poate fi folosit pentru a descrie procesul transferului de impuls. Sistemul centrului de masă se dovedește a fi, în particular, foarte convenabil din mai multe motive. El este un sistem de coordonate care se mișcă cu viteza centrului de masă a particulelor considerate în sistemul L (al laboratorului). Dacă dorim să transformăm anumite mărimi, vitezele, de exemplu, din sistemul L în sistemul centrului de masă, atunci trebuie să facem o transformare corespunzătoare de coordonate. Metoda de transformare, în acest caz, este simplă: deoarece sistemul centrului de masă se mișcă în sistemul L cu viteza $\vec{v}_m$ a centrului de masă, viteza în sistemul centrului de masă se obține scăzînd vectorul $\vec{v}_m$ din vitezele respective din sistemul L

$$\vec{v}'_{n0}=\vec{v}_{n0}-\vec{v}_m;\quad \vec{v}'_{n1}=\vec{v}_{n1}-\vec{v}_m;$$
$$\vec{v}'_{k0}=-\vec{v}_m;\quad \vec{v}'_{k1}=\vec{v}_{k1}-\vec{v}_m. \qquad (2.39)$$

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile scrise cu prim reprezintă mărimi măsurate în sistemul centrului de masă. Definiţia vitezei centrului de masă este de asemenea necesară, ea fiind în acest caz

$$\vec{v}_m = \frac{1}{A+1}\vec{v}_{n0}. \tag{2.40}$$

Cu relaţiile (2.39) şi (2.40) putem transforma cantităţile deduse pentru sistemul L în valorile corespunzătoare din sistemul centrului de masă. Din ecuaţiile a doua şi a treia din (2.39) rezultă că

$$\vec{v}'_{n1} = \vec{v}_{n1} - \frac{1}{A+1}\vec{v}_{n0}.$$

Ridicînd la pătrat, obţinem

$$v'^2_{n1} = v^2_{n1} - \frac{2}{A+1}(\vec{v}_{n1}\cdot\vec{v}_{n0}) + \frac{1}{(A+1)^2}v^2_{n0}. \tag{2.41}$$

Prin eliminarea produsului scalar $(\vec{v}_{n1}\cdot\vec{v}_{n0})$, din ecuaţiile (2.37) şi (2.41), obţinem rezultatul intermediar

$$v'^2_{n1} = \left(\frac{A}{A+1}\right)^2 v^2_{n0}$$

sau pentru mărimea vectorului

$$v'_{n1} = \frac{A}{A+1}v_{n0}. \tag{2.42}$$

Acum, raportul v_{n0}/v_{n1} trebuie transcris în sistemul centrului de masă şi această relaţie nu trebuie să reprezinte dependenţa raportului de unghiul de deviere ψ măsurat în sistemul L, ci ca funcţie de unghiul corespunzător din sistemul centrului de masă. Unghiul dintre vectorii $\vec{v}'_{n0}$ şi $\vec{v}'_{n1}$ este θ. Fig. 2.4 arată vectorii, atît în sistemul L cît şi în sistemul centrului de masă, în stînga, înainte de ciocnire, în dreapta, după ciocnire. Se observă diferenţa dintre unghiul de deviere în sistemul L şi în sistemul centrului de masă.

Dacă acum dorim să deducem o ecuaţie corespunzătoare ecuaţiei (2.38), în care în locul unghiului de deviere ψ să apară unghiul θ, atunci în (2.37) va trebui să înlocuim viteza $\vec{v}_{n1}$ cu valoarea sa în sistemul centrului de masă, conform ecuaţiilor (2.39); atunci apare produsul $(\vec{v}_{n0}\cdot\vec{v}'_{n1})$ care conţine factorul cos θ

$$A-1)\vec{v}^2_{n0} - (A+1)\vec{v}^2_{n1} + 2\vec{v}_{n0}(\vec{v}'_{n1} + \vec{v}_m) = 0.$$

Deoarece $(\vec{v}_{n0} \cdot \vec{v}'_{n1} = v_{n0} \cdot v'_{n1} \cdot \cos\theta$, conform relaţiilor (2.40) şi (2.42) avem

$$(A-1)v_{n0}^2 - (A+1)v_{n1}^2 + 2\frac{A}{A+1}v_{n0}^2\cos\theta + 2\frac{1}{A+1}v_{n0}^2 = 0$$

sau

$$\left(\frac{v_{n1}}{v_{n0}}\right)^2 = \frac{A^2+1+2A\cos\theta}{(A+1)^2} \qquad (2.43)$$

care este raportul căutat, v_{n1}/v_{n0}, exprimat ca funcţie de unghiul de deviaţie θ din sistemul centrului de masă. Eliminînd raportul v_{n1}/v_{n0} din ecuaţiile (2.38) şi (2.43), se obţine relaţia între unghiurile de deviere ψ şi θ

$$\cos\psi = \frac{1+A\cos\theta}{(A^2+1+2A\cos\theta)^{1/2}}. \qquad (2.44)$$

A fost necesară o cale ocolită de descriere a legilor de ciocnire în sistemul centrului de masă, deoarece o legătură simplă între unghiul de deviere şi probabilitatea ca un neutron să fie deviat sub un anumit unghi prin ciocnirea cu un nucleu de moderator există numai pentru unghiul de deviere din sistemul centrului de masă.

Noi nu sîntem interesaţi atît de mult în studiul proceselor de ciocnire a unui neutron cu un nucleu de moderator, ci mai degrabă în comportarea medie a mai multor neutroni care sînt deviaţi de mai multe nuclee. Problema este aceeaşi ca şi la determinarea probabilităţii ca un neutron să fie deviat într-un anumit unghi solid $d\Omega$, după ciocnirea cu un nucleu. Răspunsul este că această probabilitate este aceeaşi pentru fiecare element de unghi solid, dacă acesta este măsurat în sistemul centrului de masă.

Să explicăm această lege cu ajutorul modelului nostru. Rezultă din prima egalitate din (2.39) şi din (2.40) că

$$\vec{v}'_{n0} = \frac{A}{A+1}\vec{v}_{n0}$$

sau, în modul,

$$v'_{n0} = \frac{A}{A+1}v_{n0}. \qquad (2.45)$$

Comparînd ecuaţia (2.45) cu (2.42), rezultă

$$v'_{n0} = v'_{n1}.$$

În mod similar,

$$v'_{k0} = v'_{k1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În sistemul centrului de masă, în care, prin urmare, centrul de masă este în repaus, mărimea vitezei neutronului și a nucleului de moderator nu se schimbă la ciocnire, ci numai direcția lor. În fig. 2.5. sînt reprezentate diferite viteze în sistemul centrului de masă. În punctul de contact al neutronului cu nucleul, centrul de masă este în repaus. Procesul de ciocnire poate fi interpretat atît ca o reflexie a neutronului cît și a nucleului, de către o oglindă, reprezentată punctat în fig. 2.5, a. Acum, această reflexie are loc la suprafața nucleului, care este presupusă sferică, așa cum se arată în fig. 2.5, b. Aici, planul reflectant trece prin punctul de contact al nucleului cu neutronul.

Să considerăm un fascicul de neutroni care vine din direcția $\vec{v}'_{n0}$ și este împrăștiat de nuclee. Fie că intensitatea fasciculului este constantă. Dacă n este numărul de neutroni pe cm^3, atunci nucleul de rază R este lovit de $N = nv'_{n0}\pi R^2$ neutroni pe secundă. De pe o suprafață inelară cu lățimea $R\,d\alpha$ (vezi fig. 2.5), „ricoșează" $dN = nv'_{n0}R\,d\alpha \cos\alpha 2\pi R \cdot \sin\alpha$ neutroni pe secundă și toți sînt cuprinși într-un unghi de împrăștiere $d\theta = 2d\alpha$. Cum $\alpha = \theta/2$, avem

$$dN = 2\pi R^2 nv'_{n0} \cos\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\theta}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} nv'_{n0}R^2 \sin\theta d\theta.$$

Împărțind prin numărul total de neutroni ce se îndreaptă către nucleu, $N = \pi R^2 nv'_{n0}$, se obține probabilitatea ca un neutron ce lovește nucleul să fie deviat în intervalul unghiular $d\theta$

$$\frac{dN}{N} = dW = \frac{1}{2}\sin\theta\, d\theta. \qquad (2.46)$$

Pe de altă parte, conform figurii 2.5, unghiul solid este

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta;$$

atunci probabilitatea dW este

$$dW = \frac{dN}{N} = \frac{1}{4\pi} d\Omega.$$

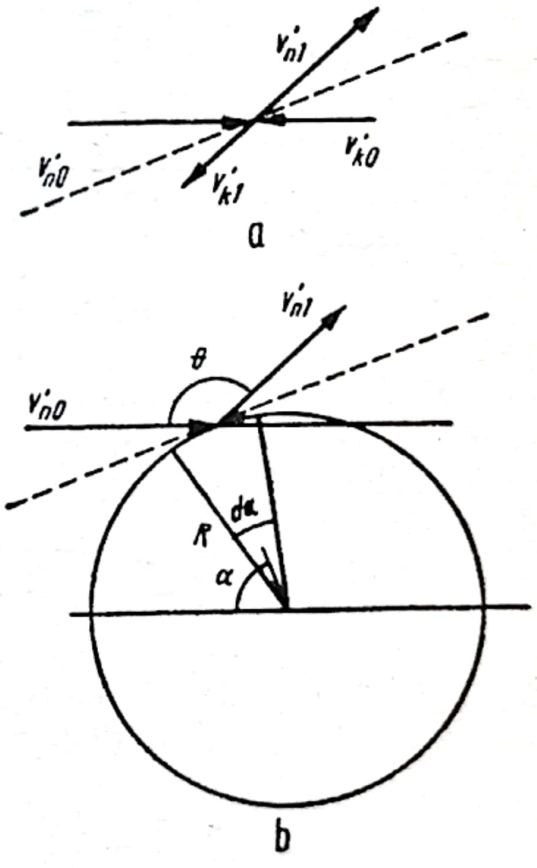


Fig. 2.5, a și b. Împrăștierea unui neutron pe suprafața unui nucleu de moderator sferic (neutronul este considerat ca un punct).

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, considerată în sistemul centrului de masă, ciocnirea neutronului cu un nucleu sferic este izotropă. De fapt, experienţele de împrăştiere confirmă aceasta pentru energii ale neutronului pînă la cîţiva MeV. Modelul nostru, al nucleului sferic, este deci apt să descrie împrăştierea neutronilor.

Etapa care a rămas, în calculul pierderii medii de energie la ciocnirea neutronului, este medierea transferului de energie, calculat în (2.43), pentru toate direcţiile posibile. Pentru aceasta este convenabil să se introducă o scară logaritmică pentru energie. Este întotdeauna convenabil să se măsoare o cantitate într-o scară logaritmică, cînd această cantitate este exprimată în unităţi relative, adică, procentual, schimbarea ei fiind independentă de valoarea cantităţii, obţinîndu-se o scară liniară pentru logaritmul cantităţii. Această ipoteză este dată în (2.43): dacă înlocuim v_{n1}^2/v_{n0}^2 cu raportul corespunzător al energiilor E_1/E_0, şi pierderea de energie a neutronului la ciocnire cu $\Delta E = E_0 - E_1$, atunci

$$\frac{v_{n1}^2}{v_{n0}^2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 - \Delta E}{E_0} = \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta}{(A+1)^2}$$

sau

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 1 - \frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta}{(A+1)^2}.$$

Să introducem acum ca o măsură a energiei, o cantitate $u = \ln E_1/E_0$, numită *letargie*; vom obţine

$$u = \ln\frac{E_1}{E_0} = \ln\frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta}{(A+1)^2}. \qquad (2.47)$$

Să mediem această pierdere logaritmică de energie pentru toţi cei N neutroni care sînt deviaţi de nucleul de moderator. Dacă notăm valoarea medie a lui u cu $-\xi$, atunci

$$\xi = -\overline{\ln\frac{E_1}{E_0}} = -\frac{1}{N}\int_0^N \ln(E_1/E_0)\,dN.$$

Semnul minus, arată că ne ocupăm de *pierderea* de energie la ciocnire.

Conform expresiilor (2.46) şi (2.47), avem

$$\xi = \bar{u} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln\frac{A^2 + 1 + 2A\cos\theta}{(A+1)^2}\sin\theta\,d\theta.$$

Prin integrare

$$\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A}\ln\frac{A-1}{A+1}. \qquad (2.48)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece, în general, A este mult mai mare decît 1, relaţia (2.48) poate fi aproximată prin

$$\xi = \frac{6}{3A+2}.$$

Această valoare a lui ξ reprezintă pierderea medie logaritmică de energie, pe care neutronul o suferă la ciocnirea cu un nucleu de moderator de masă A. Dacă moderatorul conţine nuclee atomice de diferite mase, ca de exemplu, în cazul apei, atunci în scopul de a calcula pierderea medie de energie $\overline{\xi}$, trebuie să mediem diferite valori a lui ξ pentru atomii componenţi. Atunci

$$\xi = \frac{\Sigma_{s1}\xi_1 + \Sigma_{s2}\xi_2 \ldots}{\Sigma_{s1} + \Sigma_{s2} + \ldots} \tag{2.49}$$

în care Σ_{s1}, Σ_{s2}, ... sînt secţiunile eficace macroscopice de împrăştiere ale nucleelor conţinute în moderator.

O cantitate ce va fi utilizată frecvent în cele ce urmează este numărul de ciocniri pe care trebuie să le sufere un neutron pentru a traversa un interval particular de energie, $E \to E'$. Aici folosirea unei mărimi logaritmice a energiei este justificată de însăşi faptul că decrementul mediu al energiei pentru două ciocniri consecutive este constant şi egal cu ξ. Numărul de ciocniri pe care trebuie să le sufere un neutron pentru a trece prin intervalul energetic $E \to E'$ este

$$\Delta z = \frac{\ln E - \ln E'}{\xi} = \frac{\ln E/E'}{\xi}. \tag{2.50}$$

Dacă, în particular, intervalul de energie $E \to E'$ este mic, atunci (2.50) devine

$$z = \frac{\Delta \ln E}{\xi} = \frac{\Delta E}{E \cdot \xi}, \tag{2.51}$$

Pierderea logaritmică medie de energie la o ciocnire a unui neutron cu un nucleu dă o imagine a calităţii moderatorului. Într-adevăr, aşa cum s-a arătat mai înainte, un moderator bun este acela care încetineşte rapid neutronii, adică are o valoare medie mare pentru pierderea de energie la o ciocnire.

În tabelul 2.1 sînt enumeraţi diferiţi moderatori cu caracteristicile lor.

Totuşi, cantitatea ξ nu evaluează suficient de complet un moderator, căci puterea de încetinire depinde de asemenea de densitatea moderatorului şi de secţiunea eficace de împrăştiere, adică de secţiunea macroscopică de împrăştiere a moderatorului. Vom defini deci o nouă

Scanned with OKEN Scanner

cantitate ca măsură a calității unui moderator, pierderea de energie pe cm de drum al neutronului $\xi/\lambda_s = \xi\Sigma_s$. Această cantitate este denumită *putere de încetinire* și este dată de asemenea în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1.

Caracteristicile moderatorilui

Elementul	Numărul de masă	ξ	$\xi\Sigma_s$ (cm^{-1})	$\xi\Sigma_s/\Sigma_a$
Hidrogen	1	1,000		
Deuteriu	2	0,725		
Beriliu	9	0,206	0,16	150
Grafit	12	0,158	0,063	170
Apă	—	0,927	1,53	70
Apă grea	—	0,508	0,177	21.000

În final, măsura în care un moderator capturează neutronii, este la fel de importantă. Ca măsură a acesteia, se definește cantitatea $\xi\Sigma_s/\Sigma_a$, numită *raport de moderare*; el este arătat de asemenea în tabelul 2.1.

4. Încetinirea neutronilor de fisiune

Să folosim acum rezultatele obținute referitor la ciocnirea simplă pentru a descrie comportarea neutronilor cu energii superioare energiei termice, din momentul în care apar ca neutroni rapizi de fisiune pînă ce ei devin termici. Pentru aceasta trebuie, la început, să facem cîteva ipoteze simplificatoare:

1) Neutronii de fisiune trebuie să pornească toți cu aproximativ aceeași energie, cu alte cuvinte, nici un neutron de fisiune nu pleacă cu energie termică.

2) Vor fi considerați numai neutronii care au suferit trei ciocniri cu nucleele de moderator după apariția lor ca neutroni de fisiune.

3) Limita inferioară a regiunii energetice de care ne ocupăm va fi plasată deasupra regiunii termice.

4) În timpul încetinirii nici un neutron nu va fi pierdut prin absorbție sau prin scurgere în afara reactorului.

5) Numărul de masă al nucleului de moderator este mai mare decît unitatea.

6) Întregul proces de încetinire va fi presupus a avea loc în regim de echilibru.

Scanned with OKEN Scanner

La momentul oportun vom spune mai mult despre aceste șase ipoteze care simplifică teoria încetinirii descrisă în cele ce urmează.

Să presupunem că apar q neutroni de fisiune pe secundă și cm^3 în reactor. Aceşti q neutroni se ciocnesc cu nucleele de moderator și sînt astfel încetiniți și după cîteva ciocniri — să zicem aproximativ trei — ei ating limita superioară a regiunii de energie, conform ipotezelor 1 și 2. Deoarece conform ipotezei 4 nici un neutron nu se pierde în timpul procesului de încetinire, numărul neutronilor ce intră în regiunea termică pe secundă și cm^3 este egal cu q.

Ipoteza că întreg procesul de încetinire este în echilibru și conform ipotezei 4 nu apar nici pierderi de neutroni înseamnă că numărul de neutroni care sînt încetiniți sub o energie dată E este independent de valoarea energiei E. Acest număr este întotdeauna egal cu $q \cdot q$ este numit „densitate de încetinire".

Totuși, faptul că densitatea de încetinire este constantă nu spune încă nimic direct despre distribuția de neutroni în întreg domeniul de energie. Trebuie să stabilim, în primul rînd, această dependență a densității de neutroni de energie din legile de ciocnire.

Să ne întoarcem pentru început la ecuația (2.43).

$$\frac{E}{E_0} = \frac{A^2+1+2A\cos\theta}{(A+1)^2} \tag{2.52}$$

unde indicele 1 al lui E_1 din ecuația (2.43) a fost omis.

Ecuația arată cum energia inițială a neutronului E_0 scade la o energie E ca funcție de unghiul de împrăștiere, și dorim să stabilim limitele pierderii de energie suferite de neutron ca rezultat al unei ciocniri. Pierderea minimă de energie apare cînd neutronul atinge doar ușor nucleul de moderator. În acest caz nu se transferă nici o energie, adică la $\cos\theta = 1$, $E_0 - E = 0$. Pe de altă parte, cel mai mare transfer de energie are loc cînd neutronul suferă o ciocnire frontală cu nucleul. Atunci $\cos\theta = -1$ și cea mai scăzută energie la care poate ajunge neutronul cu energia E_0 printr-o ciocnire este $[(A-1)/(A+1)]^2 E_0$. În raport cu unghiul sub care neutronul este deviat, energia sa poate varia între $[(A-1)/(A+1)]^2 E_0$ și E_0.

Trebuie să stabilim acum probabilitatea ca neutronii să cadă într-o regiune dE a intervalului energetic $E_0 \div [(A-1)/(A+1)]^2 E_0$, ca funcție de unghiul de împrăștiere. Pentru aceasta, diferențiem ecuația (2.52), considerînd E_0 constant și obținem

$$dE = -E_0 \frac{2A}{(A+1)^2} \sin\theta d\theta. \tag{2.53}$$

O comparație a ecuației (2.46) cu aceasta din urmă arată că numărul dN de neutroni care cad de la energia E_0 într-o regiune dE este inde-

pendentă de unghiul de deviaţie 0, şi este astfel independent de energia E. Aceasta înseamnă deci că neutronii de energie E_0 împrăştiaţi se distribuie uniform pe întreg intervalul $E_0 \div [(A-1)/(A+1)]^2 E_0$.

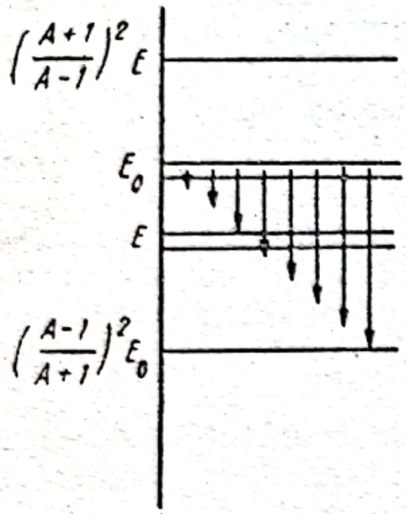


Fig. 2.6. Încetinirea neutronilor.

Fig. 2.6 reprezintă scala energiei. Neutronii de energie E_0 împrăştiaţi cad într-o regiune energetică sub E_0, şi sînt distribuiţi uniform în intervalul energetic $E_0 \div [(A-1)/(A+1)]^2 E_0$. Aceasta este indicat prin lungimea săgeţilor. Între $[(A-1)/(A+1)]^2 E_0$ şi E_0 se află şi regiunea dE considerată. Totuşi, expresia găsită trebuie întrucîtva corectată, deoarece distribuţia neutronilor în scara energiei este continuă şi astfel afirmaţia că neutronul este scos din starea de energie E prin împrăştiere, este fără sens. De aceea, considerăm o regiune energetică îngustă dE_0 sub E_0 şi la fel ca în paragraful 2.1, introducem o funcţie $F(E_0)$ care este astfel aleasă încît $F(E_0)dE_0$ să reprezinte numărul neutronilor care, pe secundă şi cm^3, părăsesc prin împrăştiere domeniul de energie dE_0 şi cad în domeniul aflat sub E_0.

Deoarece intenţionăm să calculăm numărul de neutroni q_{th} care devin termici pe cm^3 şi secundă, trebuie acum să ne ocupăm de numărul de neutroni care traversează un prag de energie pe secundă şi cm^3. Pentru acest prag de energie, alegem valoarea E. Se calculează din distribuţia uniformă, că o fracţiune

$$F(E_0)dE_0 \frac{E-[(A-1)/(A+1)]^2 E_0}{E_0-[(A-1)/(A+1)]^2 E_0} \tag{2.54}$$

a numărului de neutroni care ies din intervalul de energie dE_0 din jurul energiei E_0 şi trec în intervalul energetic $E_0 \div [(A-1)/(A+1)]^2 E_0$, cad într-o regiune energetică sub pragul E. Totuşi aceştia sînt numai neutroni ce provin din intervalul dE_0. În scopul de a calcula numărul total al neutronilor care traversează pragul E, în fiecare secundă şi într-un cm^3, trebuie să integrăm expresia (2.54) pe întreaga zonă de energie din care un neutron poate atinge pragul E printr-o ciocnire. Aceasta este regiunea $[(A+1)/(A-1)]^2 E \div E$. Numărul de neutroni ce traversează pragul E pe secundă şi cm^3 este deci

$$q(E) = \int_E^{[(A+1)/(A-1)]^2 E} F(E_0) \frac{E-[(A-1)/(A+1)]^2 E_0}{E_0[1-[(A-1)/(A+1)]^2]} dE_0. \tag{2.55}$$

Scanned with OKEN Scanner

Nu sîntem totuşi în măsură să spunem ceva despre forma funcţiei $F(E_0)$. Dacă ne reamintim condiţia stabilită mai înainte, că densitatea de încetinire q trebuie să fie aceeaşi pentru orice prag de energie, atunci această condiţie poate fi scrisă sub forma $dq/dE=0$, unde poziţia pragului de energie E este arbitrară. Diferenţiind ecuaţia (2.55), obţinem

$$\frac{dq}{dE}=\frac{d}{dE}\int_{E}^{[(A+1)/(A-1)]^2E} F(E_0)\,\frac{E-[(A-1)/(A+1)]^2E_0}{E_0[1-[(A-1)/(A+1)]^2]}\,dE_0=$$

$$=\int_{E}^{[(A+1)/(A-1)]^2E} F(E_0)\,\frac{dE}{E_0[1-[(A-1)/(A+1)]^2]}-F(E).$$

Dacă punem $dq/dE=0$, obţinem o ecuaţie pentru funcţia $F(E)$

$$F(E)=\int_{E}^{[(A+1)/(A-1)]^2E}\frac{F(E_0)dE_0}{E_0[1-[(A-1)/(A+1)]^2]}. \qquad (2.56)$$

Aşa cum se poate verifica prin înlocuire, o soluţie a acestei ecuaţii integrale este

$$F(E)=C/E$$

în care C este o constantă. Cu această valoare a funcţiei $F(E)$, putem rezolva integrala din (2.55) şi obţinem

$$q=C\left[1+\frac{(A-1)^2}{2A}\ln\frac{A-1}{A+1}\right].$$

Expresia din parantezele drepte este exact valoarea pe care am calculat-o pentru pierderea logaritmică de energie la o ciocnire a neutronului (2.48). Astfel că

$$q=C\xi=F(E)E\xi. \qquad (2.57)$$

Să scriem acum funcţia $F(E)$ într-o formă puţin diferită. $F(E)$ a fost definită astfel încît $F(E)dE$ reprezintă numărul de neutroni care se ciocnesc cu nucleele de moderator, pe secundă şi cm³ la energia E în intervalul de energie dE şi prin aceasta părăsesc intervalul de energie dE. Dacă acum aplicăm din nou dependenţa de energie a densităţii de flux $\varphi(E)$ introdusă în (2.13), atunci, conform celor expuse despre secţiunea eficace, $\Sigma_s\varphi(E)dE$ este numărul de neutroni care sînt împrăştiaţi la energia E, pe secundă şi cm³, în intervalul de energie dE. Aceasta este $F(E)dE$. Deci

$$F(E)=\Sigma_s\varphi(E). \qquad (2.58)$$

Scanned with OKEN Scanner

Astfel obținem pentru densitatea de încetinire

$$q = \xi \Sigma_s \varphi(E) E. \tag{2.59}$$

Pentru a face mai clară semnificația ei fizică, să înmulțim ecuația (2.59) cu intervalul de energie dE și să-i schimbăm puțin forma

$$q \frac{dE/E}{\xi} = q \frac{d \ln E}{\xi} = \Sigma_s \varphi(E) dE. \tag{2.60}$$

Din expresia (2.51) știm că raportul $\frac{d \ln E}{\xi} = \frac{dE/E}{\xi}$ este numărul de ciocniri necesare ca un neutron să traverseze intervalul energetic dE din jurul energiei E. Dacă acest număr este multiplicat cu q, numărul de neutroni care traversează pragul energetic $E+dE$ pe secundă și cm³, atunci în partea stîngă a ecuației (2.60) este numărul de neutroni care sînt difuzați în nucleele de moderator pe secundă și cm³, în intervalul de energie dE, și acest număr, așa cum știm din definiția secțiunii eficace de împrăștiere, Σ_s, este dat de asemenea de partea dreaptă a ecuației.

Să analizăm acum ipotezele restrictive care au fost făcute la începutul acestui calcul.

Mai întîi, ipoteza 1, care stabilește că nici un neutron de fisiune nu poate apare în interiorul zonei energetice considerate. Aceasta a fost o condiție necesară, deoarece altfel presupunerea cu privire la valoarea constantă a densității de încetinire q nu ar fi fost valabilă. În ecuația (2.55) ar fi apărut un termen de sursă adițional, dependent de energie, care ar fi complicat calculul. Să estimăm dacă eroarea pe care am făcut-o prin neglijarea neutronilor de fisiune este mare.

Să presupunem, ca exemplu, că moderatorul este grafitul, adică carbon cu numărul de masă 12. Dacă energia medie a neutronilor de fisiune este aproximativ 2 MeV și energia termică pînă la care neutronii sînt încetiniți este 0,025 eV, atunci, conform ecuației (2.50), numărul de ciocniri pe care neutronul trebuie să le sufere pentru a traversa intervalul de energie 2 MeV ÷ 0,025 eV este $z_1 = (1/\xi)(\ln 2 \cdot 10^6 - \ln 0{,}025)$. Deoarece pentru carbon ξ este 0,158, $z_1 = 115$. Pe de altă parte, noi trebuie să avem în vedere neutronii de fisiune încetiniți pînă la 0,1 MeV. Numărul de ciocniri necesare pentru atingerea acestei energii este $z_2 = (1/\xi)(\ln 2 - \ln 0{,}1) = 19$. Regiunea în care calculul de mai sus este incorect este deci mai mică de $\frac{1}{6}$ din întreaga regiune de încetinire. Mai mult, formula dată mai sus este aproape insensibilă la influența sursei de neutroni de acest tip și regiunea de energie mai interesantă pentru tehnologia reactorului este regiunea de energii joase.

Pentru un motiv asemănător a fost introdusă ipoteza a doua. Ea se referă de asemenea la zona de energie superioară. Dacă presupu-

Scanned with OKEN Scanner

nem acum, pentru simplitate, că toţi neutronii de fisiune pleacă cu aceeaşi energie E_f, atunci după prima ciocnire ei intră în zona de energie $[(A-1)/(A+1)]^2E_f \div E_f$. Dacă dorim să calculăm acum densitatea de încetinire în această treaptă superioară de energie, atunci formalismul dat în ecuaţia (2.55) ar fi nepotrivit pentru domeniul de integrare dincolo de limita superioară E_f. Mai mult, termenul pentru sursa monoenergetică nu este potrivit pentru raţionamentul de mai sus. Astfel, formula noastră nu poate descrie corect comportarea neutronilor în regiunea $[(A-1)/(A+1)]^2E_f \div E_f$. De asemenea, sub energia $[(A-1)/(A+1)]^2 E_f$ formula nu este chiar corectă, deoarece există o interacţiune a sursei de neutroni monoenergetici nu numai în regiunea energetică $[(A-1)/(A+1)]^2E_f \div E_f$, ci de asemenea în regiunea $\{[(A-1)/(A+1)]^2\}^2E_f \div [(A-1)/(A+1)]^2E_f$ şi aşa mai departe. Motivul pentru aceasta rezidă în natura ecuaţiei integrale (2.56). Desigur, interacţia scade cu energia şi poate fi neglijată sub $[(A-1)/(A+1)]^6E_f$ adică după cîteva ciocniri. În domeniul energetic $[(A-1)/(A+1)]^6E_f \div \div E_f$, formula noastră şi aşa nu este aplicabilă, datorită distribuţiei energetice largi a neutronilor de fisiune. O interacţiune similară cu aceea a sursei monoenergetice a neutronilor de fisiune apare, de asemenea, dacă la o anumită energie există o puternică absorbţie a neutronilor. Acesta este, desigur, cazul capturii de rezonanţă a neutronilor. Un astfel de pic de rezonanţă la energia E_r afectează asemănător regiunea de sub E_r pînă la aproximativ $[(A-1)/(A+1)]^6E_r$. Mai tîrziu, la deducerea aşa numitei probabilităţi de evitare a rezonanţei, vom presupune că picurile de rezonanţă au o energie minimă de separare de $E_r\{1-[(A-1)/(A+1)]^6\}$. Dacă aceasta nu este adevărat, atunci există un cuplaj între picuri.

A treia condiţie a fost aceea ca ecuaţiile să nu fie aplicate la regiunea de energie imediat superioară zonei termice. Acolo energia termică a nucleelor de moderator este comparabilă cu aceea a neutronilor, ceea ce contrazice ipoteza pe care am făcut-o la deducerea formulei pentru o singură ciocnire. Pierderea relativă de energie pe ciocnire nu este atunci constantă, adică independentă de energie. Totuşi, această regiune energetică care trebuie exclusă din calcule este relativ mică.

Condiţia 4 este mai drastică decît celelalte; aşa cum deja am stabilit, noi am pus-o în scopul de a ţine densitatea de încetinire constantă. Desigur, ea nu este îndeplinită complet, datorită, pe de o parte, scurgerii de neutroni prin pereţii reactorului, în timpul procesului de încetinire, iar pe de altă parte în zona energetică de încetinire apar picurile de rezonanţă ale U-238 şi Th-232 şi deci o puternică absorbţie a neutronilor. Pentru ambele motive, calculele noastre trebuie corectate. Nu există nici o teorie riguroasă care să ia în consideraţie cu exactitate scurgerea şi absorbţia de rezonanţă a neutronilor, deoarece ea ar fi

Scanned with OKEN Scanner

foarte complicată. Se porneşte cu o teorie a încetinirii care nu ţine seama de scurgerea sau absorbţia neutronilor în prima aproximaţie. Scurgerea şi absorbţia de neutroni sînt apoi luate în consideraţie prin factori de corecţie. Astfel se defineşte aşa-numitul factor de evitare a scurgerii pentru neutronii rapizi, P_f, care exprimă numărul de neutroni ce rămîn în reactor în timpul procesului de încetinire, adică care nu se scurg în afară. În mod asemănător se defineşte o „probabilitate de evitare a rezonanţei" sau „factorul p", care exprimă fracţiunea de neutroni ce evită captura de rezonanţă în timpul procesului de încetinire.

Aplicînd factorii de corecţie la densitatea de încetinire q, rezultă că

$$q_{th} = P_f \cdot p \cdot q_f \tag{2.61}$$

unde q_{th} este numărul de neutroni ce devin termici pe cm³ şi secundă şi q_f numărul neutronilor de fisiune ce sînt eliberaţi pe cm³ şi secundă. Valorile P_f şi p trebuie evident să nu fie mult mai mici decît unitatea, pentru a fi justificată folosirea lor ca factori de corecţie în sensul de mai sus.

Motivul pentru condiţia 5 este asemănător cu cel pentru condiţia 2. Dacă moderatorul este hidrogenul pentru care numărul de masă al nucleelor împrăştietoare este $A=1$, întreaga energie a unui neutron de fisiune poate fi cedată într-o singură ciocnire cu un atom de hidrogen. La o ciocnire deci, neutronul poate deveni termic. Aceasta înseamnă totuşi că ceea ce am stabilit la discutarea condiţiei 2, şi anume că formula de mai sus nu este aplicabilă în regiunea de energie $[(A-1)/(A+1)]^2 E_f \div E_f$, este valabil şi aici pentru întreaga regiune de energie de la E_f la E_{th}, din pricina influenţei directe a neutronilor de fisiune. Fie E_f din nou aceeaşi pentru toţi neutronii de fisiune.

Pentru a face aceasta mai clar, să calculăm procesul de încetinire în hidrogen ca moderator. Va fi folosită aceeaşi notaţie ca mai înainte, dar deoarece $[(A-1)/(A+1)]^2=0$, aici avem un singur interval de energie $0 \div E_f$. Energia termică corespunde energiei 0. În locul expresiei (2.54) avem acum

$$F(E_0)\mathrm{d}E_0 \frac{E}{E_0} \tag{2.62}$$

şi în locul ecuaţiei (2.55) avem

$$q_1(E) = \int_E^{E_f} F(E_0) \frac{E}{E_0} \mathrm{d}E_0 . \tag{2.63}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia (2.63) se referă numai la acei neutroni care au ajuns deja în regiunea dE_0 printr-o ciocnire. În plus, există neutroni de fisiune care trec în regiunea energetică $0 \div E_f$ la *prima* lor ciocnire. Numărul acestor neutroni pe secundă şi cm^3 este egal cu q, chiar densitatea de încetinire. Partea de neutroni care trec prin regiunea E la prima lor ciocnire este

$$q_2(E) = q \cdot \frac{E}{E_f}. \tag{2.64}$$

Trebuie adunate expresiile (2.63) şi (2.64) pentru a obţine densitatea de încetinire q

$$q(E) = q \cdot \frac{E}{E_f} + \int_E^{E_f} F(E_0) \frac{E}{E_0} dE_0. \tag{2.65}$$

Punînd din nou $dq/dE = 0$, obţinem pentru $F(E)$

$$F(E) = q/E. \tag{2.66}$$

Prin acest exemplu al hidrogenului ca moderator am arătat aici cum trebuie tratată influenţa neutronilor de fisiune monoenergetici asupra regiunii energetice sub energia de fisiune E_f. La fel am proceda pentru a calcula comportarea neutronilor în regiunea de energie $[(A-1)/(A+1)]^2 E_f \div E_f$ în cazul moderatorului cu nuclee mai grele. Totuşi, nu ne putem propune să facem acest calcul, deoarece aşa cum ştim, ipoteza neutronilor de fisiune monoenergetici nu este niciodată satisfăcută.

5. Difuzia neutronilor în regiunea de încetinire

Acest paragraf se ocupă cu calculul factorului de evitare a scurgerii pentru neutronii rapizi P_f. Pentru a-l obţine trebuie să considerăm difuzia neutronilor rapizi. Aşa cum deja s-a arătat în paragraful 2.1, dificultatea constă în faptul că, spre deosebire de neutronii termici, neutronii rapizi nu sînt monoenergetici. Constanta de difuzie D este acum dependentă de energia neutronilor, astfel că neutronii de energii mari difuzează mai repede decît cei de energie mai mică.

Pentru început să selectăm din toţi neutronii pe aceia care au energia cuprinsă într-un interval energetic elementar E, $E+dE$. Aceşti neutroni pot fi consideraţi monoenergetici şi putem scrie o ecuaţie de

Scanned with OKEN Scanner

difuzie pentru ei. Fie $D(E)$ coeficientul de difuzie constant pentru toţi neutronii cu energia în intervalul E, $E+\mathrm{d}E$.

Ca şi în teoria încetinirii, să presupunem că nici un neutron nu intră direct în această zonă energetică ca neutron de fisiune; regiunea este deci sub 0,1 MeV. Mai mult, nu va fi luată în consideraţie absorbţia neutronilor rapizi în reactor. În general ne vom baza pe ipotezele făcute la începutul teoriei încetinirii în paragraful 2.4, dar cu diferenţa esenţială că aici scurgerea neutronilor rapizi joacă rolul decisiv.

Deoarece nu se admit nici surse pozitive, nici negative, ecuaţia de difuzie pentru regiunea de energie cuprinsă între E şi $E+\mathrm{d}E$ este conform ecuaţiei (2.26)

$$D(E)\nabla^2\varphi(E)\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}\,[n(E,t)\,dE]}{\mathrm{d}t}. \tag{2.67}$$

Din pricina dependenţei de energie cantitatea $\varphi(E)\mathrm{d}E$, conform definiţiei din ecuaţia (2.13), trebuie să apară din nou în locul fluxului Φ al neutronilor termici monoenergetici. În mod asemănător, în locul numărului de neutroni pe cm^3 apare mărimea $n(E)\mathrm{d}E$. Spre deosebire de ecuaţia (2.26), în ecuaţia de difuzie este scrisă diferenţiala totală $\mathrm{d}n/\mathrm{d}t$ care înseamnă că n este dependent nu numai de timp (şi desigur de poziţie), ci şi de energie şi că diferenţiala trebuie calculată faţă de ambele variabile. Astfel, ecuaţia (2.67) devine

$$D(E)\nabla^2\varphi(E)\mathrm{d}E = \frac{\partial(n\,dE)}{\partial t}\frac{}{} + \frac{\partial(n\,dE)}{\partial E}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}.$$

Ca şi în teoria încetinirii, va fi tratat numai cazul stării de echilibru. Astfel, $\partial(n\,\mathrm{d}E)/\partial t$ este zero şi deci

$$D(E)\nabla^2\varphi(E)\mathrm{d}E = \frac{\partial(n\,dE)}{\partial E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}. \tag{2.68}$$

S-a presupus, în ecuaţia (2.68), că la funcţionarea reactorului în regim de echilibru ne concentrăm atenţia asupra unui anumit număr de neutroni rapizi $n(E)\,\delta E$ (pentru a evita confuziile s-a scris δE în locul diferenţialei $\mathrm{d}E$), la începutul procesului de încetinire şi apoi urmează distrugerea acestor neutroni în timpul procesului de încetinire. Ecuaţia (2.68) arată că unii din aceşti neutroni se pierd în timp prin scurgere.

În ecuaţia (2.68), pe care o transcriem

$$D(E)\nabla^2\varphi(E)\,\delta E = \frac{\partial n\,(E)\,\delta E}{\partial E}\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \tag{2.69}$$

este de remarcat că în diferenţiala $\partial(n\,\delta E)/\partial E$, nu numai $n(E)$ este dependentă de energie, ci şi lărgimea intervalului δE. Trebuie deci să vedem pentru început cum se schimbă δE cu energia. Pentru aceasta,

Scanned with OKEN Scanner

folosim ecuaţia (2.60), care descrie încetinirea neutronilor fără scurgere. Din ecuaţia (2.60), putem constata dependenţa lui δE de energie E, presupunînd că numărul de neutroni sub $n(E)\,\delta E$ rămîne constant, deoarece nu există scurgere de neutroni, şi atunci introducem acest δE în ecuaţia (2.69). Ecuaţia (2.60) devine acum

$$q\delta E=\xi\Sigma_s E\varphi(E)\delta E=\xi\Sigma_s En(E)v(E)\delta E$$

$$=\xi(2/m)^{1/2}\Sigma_s E^{3/2}n(E)\delta E \tag{2.70}$$

în care

$$\varphi(E)=n(E)v(E)=n(E)(2/m)^{1/2}E^{1/2}.$$

$v(E)$ este viteza medie a neutronului şi m masa neutronului. Atunci

$$n\,\delta E=q\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}\cdot E^{-3/2}\frac{\delta E}{\xi\Sigma_s}.$$

Numărul de neutroni trebuie să fie independent de energie, adică

$$\frac{\mathrm{d}n\delta E}{\mathrm{d}E}=0=q\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2}\left[\frac{-3}{2}\cdot\frac{\delta E}{\xi\Sigma_s}E^{-5/2}+E^{-3/2}\frac{\mathrm{d}\dfrac{\delta E}{\xi\Sigma_s}}{\mathrm{d}E}\right] \tag{2.71}$$

sau

$$\delta E=K\xi\Sigma_s E^{3/2} \tag{2.72}$$

unde K este o constantă de integrare.

Astfel lărgimea intervalului $\delta E(E)$ variază aproximativ cu $E^{3/2}$, deoarece $\xi\Sigma_s$ este aproximativ constant.

Dacă stabilim acum că energia E este direct dependentă de timp, atunci putem scrie (2.72) puţin diferit:

Numărul de ciocniri pe care trebuie să le sufere un neutron cu nucleele de moderator, pentru a traversa intervalul de energie $\mathrm{d}E$, este, conform relaţiei (2.51), $\mathrm{d}z=(1/\xi)\mathrm{d}E/E$. Pe de altă parte, acest număr de ciocniri $\mathrm{d}z$ este acelaşi cu raportul dintre $v\mathrm{d}t$, spaţiul parcurs de neutroni în timpul $\mathrm{d}t$ şi drumul liber mijlociu. Astfel

$$\frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}E}{E}=\frac{v\mathrm{d}t}{\lambda_s}=\Sigma_s v\mathrm{d}t$$

sau, înlocuind $v=(2/m)^{1/2}E^{1/2}$,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2}\xi\Sigma_s E^{3/2}. \tag{2.73}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să înlocuim dE în ecuația (2.72) prin $\delta E=(dE/dt)\cdot\delta t$ în care δt este diferența de timp corespunzătoare lui δE și, prin comparație cu ecuațiile (2.72) și (2.73), obținem

$$\frac{dE}{dt}\cdot\delta t=\frac{dE}{dt}\cdot K\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.74}$$

Diferența de timp δt este deci o constantă. Valoarea sa nu mai prezintă interes aici.

Putem acum transcrie (2.68), scriind aici, de asemenea, $\delta E=(dE/dt)\delta t$ și scoțînd constanta δt în afară, ca o constantă diferențială,

$$D(E)\nabla^2\varphi(E)\,\delta E=\frac{\partial n(dE/dt)}{\partial E}\,\delta t\cdot\frac{dE}{dt}.$$

De aici, dacă punem $\frac{\delta E}{\delta t}=\frac{dE}{dt}$,

$$D(E)\nabla^2\varphi(E)=\frac{\partial n(dE/dt)}{\partial E}.$$

Ținînd seamă că $\varphi(E)=(1/\xi\Sigma_s E)q$ (ecuația (2.59)) și $ndE/dt=\xi\Sigma_s E\varphi$, obținem

$$\nabla^2 q=\frac{\xi\Sigma_s(E)E}{D(E)}\frac{\partial q}{\partial E}. \tag{2.75}$$

Ecuația (2.75) are exact aceeași formă cu ecuația de conductibilitate a căldurii cu complicația suplimentară că conductibilitatea termică nu este constantă. Ecuația (2.75) se poate separa în două ecuații diferențiale prin introducerea unei noi variabile τ, așa încît

$$d\tau=\frac{D(E)}{\xi\Sigma_s(E)E}\,dE \tag{2.76}$$

și

$$\nabla^2 q=\frac{\partial q}{\partial\tau}. \tag{2.77}$$

Integrînd (2.77) pentru regiunea energetică de încetinire, adică între E_f și E_{th}, obținem

$$\tau_{th}=\int_{E_{th}}^{E_f}\frac{D(E)}{\xi\Sigma_s(E)E}\,dE. \tag{2.78}$$

Cantitatea τ a primit denumirea de *vîrstă Fermi*. Ea este într-adevăr un fel de vîrstă, și anume vîrsta pe care neutronii o ating din momentul apariției lor ca neutroni de fisiune pînă la încetinirea lor la o anumită

Scanned with OKEN Scanner

energie E, de exemplu E_{th}. Desigur, vîrsta Fermi nu are dimensiuni de timp, ci de suprafață. Este deci mai bine să căutăm o interpretare geometrică pentru vîrsta Fermi, decît o comportare în timp.

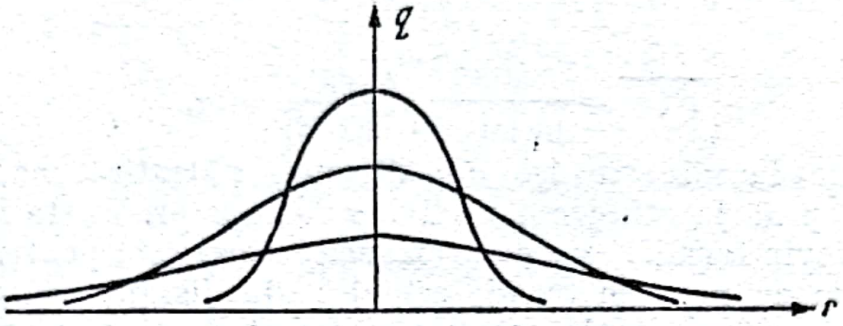


Fig. 2.7. Variația densității de încetinire q cu distanța r de la sursă pentru diferite valori ale vîrstei Fermi. Curbele mai plate sînt pentru τ mai mare.

Pentru aceasta rezolvăm ecuația (2.77), ca la deducerea drumului liber mijlociu, în coordonate sferice

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial q}{\partial \tau}.$$

O soluție a acestei ecuații diferențiale este

$$q = (4\pi\tau)^{-3/2} exp(-r^2/4\tau). \tag{2.79}$$

Pentru τ constant și r variabil, aceasta este o distribuție gaussiană a densității de încetinire. Ea este reprezentată în fig. 2.7. pentru diferite valori ale lui τ. Consecința fig. 2.7 este următoarea:

Dacă injectăm un număr de neutroni de fisiune cu vîrsta Fermi $\tau = 0$ în punctul $r = 0$ într-un moderator, atunci în decursul timpului acești neutroni vor difuza în moderator din poziția lor inițială și, în același timp, vîrsta lor Fermi va crește. Cu cît neutronii cedează mai mult din energia lor, sau le crește „vîrsta", curba de distribuție se aplatizează. Norul de neutroni se scurge independent. În scopul de a da o semnificație geometrică vîrstei Fermi să calculăm acum, în același mod cum am calculat drumul liber mijlociu, distanța pătratică medie parcursă de neutron de la sursă pînă cînd atinge vîrsta Fermi τ

$$\overline{r^2(\tau)} = \frac{\int_0^\infty r^2 4\pi r^2 q(r,\tau)\,dr}{\int_0^\infty 4\pi r^2 q(r,\tau)\,dr} = \frac{\int_0^\infty r^4 \exp(-r^2/4\tau)\,dr}{\int_0^\infty r^2 \exp(-r^2/4\tau)\,dr}.$$

Dacă notăm

$$\int_0^\infty \exp(-r^2/4\tau)\,dr = J\left(\frac{1}{4\tau}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}/(1/4\tau)^{\frac{1}{2}}$$

atunci

$$\overline{r^2(\tau)} = \frac{d^2J}{[d(1/4\tau)]^2} \Big/ \frac{dJ}{d(1/4\tau)} = 6\tau. \tag{2.80}$$

Astfel, vîrsta Fermi este 1/6 din distanţa pătratică medie parcursă de neutroni pînă la atingerea vîrstei τ în reactor. Vîrsta Fermi a neutronilor ce devin termici este de asemenea interesantă pentru noi. Vîrsta Fermi pentru un neutron termic este 1/6 din distanţa pătratică medie parcursă de neutron de la sursă pînă ce el a atins energia termică.

Faptul că vîrsta Fermi nu creşte liniar cu distanţa parcursă de neutron rezultă din natura ecuaţiei (2.78). El se datoreşte naturii statistice a drumului pe care neutronul îl parcurge ca rezultat al ciocnirilor. Vom ţine seama din nou de această lege la deducerea constantei de difuzie D.

În tabelul 2.2 se dă vîrsta Fermi τ pentru diferiţi moderatori.

Pentru a calcula factorul de scurgere P_f trebuie acum să rezolvăm ecuaţia Fermi (2.77) pentru reactorul nostru. Ecuaţia Fermi este desigur o ecuaţie de difuzie similară cu ecuaţia de difuzie la starea de echilibru pentru neutronii termici, (2.26), numai că aici alături de coordonatele de poziţie există şi variabila τ. În plus, în locul fluxului Φ al neutronilor termici avem densitatea de încetinire $q(\vec{r}, \tau)$, respectiv numărul de neutroni care ating vîrsta τ pe secundă şi cm^2, deci ecuaţia are forma

$$\nabla^2 q(r, \tau) = \frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \vec{r}} \tag{2.81}$$

Tabelul 2.2

Moderator	Vîrsta Fermi τ_{th}	Lungimea de difuzie L
Apă	33 cm^2	2,88 cm
Apă grea	120 cm^2	100 cm
Grafit (densitate 1,6)	350 cm^2	50,2 cm

unde $\vec{r}$ reprezintă coordonatele de poziţie.

Ca şi la rezolvarea ecuaţiei conductibilităţii termice, această ecuaţie se rezolvă presupunînd o soluţie separabilă

$$q(\vec{r}, \tau) = R(\vec{r}) \cdot T(\tau) \tag{2.82}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde funcţia $R(\vec{r})$ conţine numai coordonale spaţiate, iar $T(\tau)$, numai variabila τ.

După împărţirea prin produsul $R \cdot T$, ecuaţia (2.81) devine

$$\frac{\nabla^2 R(\vec{r})}{R(\vec{r})} = \frac{1}{T(\tau)} \frac{\partial T(\tau)}{\partial \tau}. \tag{2.83}$$

Deoarece partea stîngă este o funcţie numai de $\vec{r}$, în timp ce partea dreaptă este o funcţie numai de τ, ambele părţi trebuie să fie egale cu o constantă pe care o vom nota cu B^2. B este factorul de formă (geometric), deja menţionat în ecuaţia (2.34).

Din ecuaţia (2.83) rezultă că

$$\nabla^2 R(\vec{r}) + B^2 R(\vec{r}) = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{dT(\tau)}{d\tau} = -B^2 T(\tau). \tag{2.84}$$

Prima ecuaţie din (2.84) arată, aşa cum se va explica mai tîrziu, numai că distribuţia spaţială a neutronilor în regiunea de încetinire se comportă identic cu aceea a neutronilor termici. Apare doar constanta B^2 în partea dreaptă.

Ecuaţia a doua din (2.84) are soluţia

$$T(\tau) = T_f \exp(-B^2 \tau)$$

unde T_f este o constantă aleasă astfel ca $T_f = T(0)$. Introducînd partea dependentă de spaţiu, obţinem

$$q(\vec{r}, \tau) = q_f(\vec{r}) \exp(-B^2 \tau) \text{ sau } q_{th}(\vec{r}, \tau_{th}) = q_f(\vec{r}) \exp(-B^2 \tau_{th}). \tag{2.85}$$

Deoarece q_f este numărul de neutroni ce apar ca neutroni de fisiune tcu vîrsta Fermi $\tau = 0$ şi q_{th} este numărul acelora ce devin termici, raportul q_{th}/q_f este fracţiunea de neutroni ce nu se scurg din reactor în timpul procesului de încetinire, sau factorul de evitare a scurgerii P_f

$$P_f = \frac{q_{th}}{q_f} = \exp(-B^2 \tau_{th}). \tag{2.86}$$

Fracţiunea $1 - P_f$ de neutroni s-a scurs prin pereţii reactorului în timpul încetinirii.

Să menţionăm, din nou, că absorbţia de rezonanţă în interiorul reactorului nu este încă conţinută în acest factor P_f. Nu vom întîlni „probabilitatea de scurgere prin rezonanţă" p înainte de paragraful al şaptelea.

Scanned with OKEN Scanner

6. Constanta de difuzie

Pînă acum constanta de difuzie a apărut numai ca un factor de proporţionalitate în ecuaţii

$$D\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-j_x;\quad D\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-j_y;\quad D\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-j_z \tag{2.87}$$

sau, mai pe scurt,

$$D\,\mathrm{grad}\,\Phi=-\vec{j}. \tag{2.88}$$

Aici D este constanta de difuzie, grad Φ — gradientul — este panta lui Φ şi $\vec{j}$ este densitatea curentului de difuzie.

La prima vedere, din (2.87) sau (2.88) apare că, dacă panta fluxului de neutroni în direcţia $\vec{j}$ a fost cauza scurgerii neutronilor, în sensul că numai din acele puncte ale mediului unde densitatea de neutroni este mai mare, neutronii difuzează, atunci, pe de altă parte, există o forţă „motrice“ ce acţionează asupra neutronilor, care tinde să anuleze diferenţa de densitate. Situaţia inversă este întîmplătoare. Difuzia neutronilor este un proces statistic în care nici o reacţie nu trebuie să apară între neutroni. Nici nu vom presupune aşa ceva în timpul raţionamentului ce urmează.

Vom considera difuzia neutronilor monoenergetici într-un material difuzant ale cărui nuclee atomice se consideră la început a fi atît de grele încît ele nu se deplasează din starea lor de repaus datorită neutronilor cu care se întîlnesc. Neutronii se vor mişca prin mediu pe un drum în zig-zag păstrîndu-şi viteza lor iniţială în tot timpul procesului de difuzie. Astfel, vor avea loc numai ciocniri elastice, fără trasfer de energie de la neutron la nucleu, şi nu va exista absorbţie. Nucleele vor fi considerate sferice, astfel că împrăştierea este izotropă, adică ascultă de legea dedusă din ecuaţia (2.46), şi anume că probabilitatea de împrăştiere în unghiul solid $d\Omega$ este independentă de unghiul de împrăştiere. Orice direcţie de împrăştiere este deci egal de probabilă. Un neutron plecînd din punctul $x=x_0$ la momentul $t=0$, începe drumul său în zig-zag prin mediu, într-o direcţie ce face un unghi θ_1 cu axa x. Mergînd în linie dreaptă, el se poate ciocni cu un nucleu după o distanţă s_1. Componenta pe direcţia x a acestui prim drum este $x_1-x_0=s_1\cos\theta_1$ (vezi fig. 2.8).

Neutronul este apoi deviat izotrop de nuclee, adică după această primă ciocnire există o probabilitate egală de deviere a sa în orice direcţie. Să presupunem că din punctul primei sale ciocniri, pînă la a doua sa ciocnire, el parcurge distanţa s_2 sub un unghi θ_2 cu axa x. Componenta

Scanned with OKEN Scanner

x a poziţiei sale la a doua ciocnire este deci $x_2 - x_0 = s_1 \cos\theta_1 + s_2 \cos\theta_2$.

Continuînd în acelaşi mod, după m ciocniri componenta x este

$$x_m - x_0 = \sum_{r=1}^{m} s_r \cos\theta_r. \qquad (2.89)$$

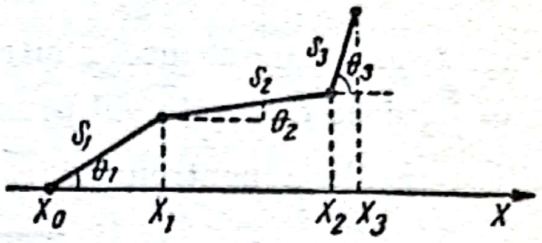


Fig. 2.8. Drumul unui neutron deviat prin ciocniri, de nuclee. Nucleele sînt indicate prin puncte.

Trebuie acum să calculăm cît s-a deplasat neutronul în medie, din punctul iniţial, într-un anumit timp. Ne interesează tot timpul numai componenta x. Dacă totuşi mediem simplu ecuaţia (2.89) atunci, după un mare număr m de ciocniri, $x_m - x_0$ va fi zero. Acesta înseamnă că, în medie, neutronul se mişcă la fel de mult atît în sensul pozitiv al axei x cît şi în sensul negativ al ei.

Fluctuaţiile acestei valori medii prezintă interes pentru noi. Pentru a le calcula, să ridicăm la pătrat ecuaţia (2.89)

$$(x_m - x_0)^2 = s_1^2 \cos^2\theta_1 + s_2^2 \cos^2\theta_2 \ldots$$
$$+ s_1 \cos\theta_1 (s_2 \cos\theta_2 + s_3 \cos\theta_3 \ldots) \ldots \qquad (2.90)$$

Luînd valoarea medie, toate produsele duble din partea dreaptă a ecuaţiei (2.90) dispar şi avem

$$\overline{(x_m - x_0)^2} = \overline{\sum_{r=1}^{m} s_r^2 \cos^2\theta_r}.$$

Valorile s_r^2 şi $\cos^2\theta_r$ pot fi mediate separat fiind independente. Media pătratului drumului liber al neutronului între două ciocniri este

$$\overline{s^2} = \frac{\int_0^\infty s^2 \exp(-s/\lambda_s)\, ds}{\int_0^\infty \exp(-s/\lambda_s) ds} = 2\lambda_s^2. \qquad (2.91)$$

$\cos^2\theta$ poate fi mediat după unghiul solid

$$\overline{\cos^2\theta} = \frac{\int_0^\pi \cos^2\theta\, d\Omega}{\int_0^\pi d\Omega} = \frac{\int_0^\pi \cos^2\theta \cdot 2\pi \sin\theta\, d\theta}{\int_0^\pi 2\pi \sin\theta\, d\theta} = \frac{1}{3}. \qquad (2.92)$$

Atunci, pentru media pătratului fluctuației în direcția x, obținem

$$\overline{(x_m - x_0)^2} = m \frac{2}{3} \lambda_s^2. \tag{2.93}$$

Dacă t_0 este timpul mediu între două ciocniri ale unui neutron, atunci $m = \frac{t}{t_0}$, dacă t este timpul pentru m ciocniri. Atunci, dacă introducem viteza medie a neutronului $\bar{v}$, (2.93) devine

$$\overline{(x - x_0)^2} = \frac{2}{3} v \lambda_s t. \tag{2.94}$$

Ca și la vîrsta Fermi, vedem că media pătratului drumului neutronului crește cu timpul în acest proces statistic (dar nu media drumului însăși, care rămîne egală cu zero).

Am limitat problema la o dimensiune, la direcția x, dar pentru evaluarea lui $\overline{\cos^2 \theta}$ putem, de asemenea, trata problema difuziei, chiar dacă neutronul a avut de la început trei grade de libertate, care ar introduce un factor 3/2. Distanța medie liberă în direcția x ar fi atunci $\lambda_x = (2/3)^{1/2} \lambda_s$.

Putem descrie un proces de difuzie unidimensional de acest tip pe o altă cale. Să presupunem că neutronul a suferit m ciocniri cu nucleele atomice, pornind din punctul $x = x_0$ și luînd de fiecare dată un pas la stînga sau la dreapta, dar la întîmplare. Probabilitatea ca în m pași să fie luați de exemplu k pași mai mult spre dreapta decît spre stînga este

$$W(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\left(\frac{m}{2}\right)^m + k\right) \tag{2.95}$$

în care $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ este probabilitatea ca m pași la dreapta sau la stînga să fie luați într-o anumită succesiune, în timp ce $\left[\left(\frac{m}{2}\right)^m + k\right]$ este numărul de posibilități de schimbare a $\frac{m}{2} + k$ pași spre dreapta cu unii similari spre stînga.

O formulă aproximativă adesea folosită în statistică este

$$W(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\left(\frac{m}{2}\right)^m + k\right) \approx \left(\frac{2}{\pi \cdot m}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-2k^2/m\right) \tag{2.96}$$

în care m este un număr foarte mare.

Scanned with OKEN Scanner

Ca și mai înainte, înlocuim $m=\bar{v}/\lambda_s t$. $x-x_0$ este acum drumul făcu de neutron pe direcția axei x, adică, după definiția de mai sus a lui λ_x,

$$x-x_0=2k\lambda_x=2k\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\cdot\lambda_s.$$

Probabilitatea de a întîlni neutronul între punctele $x-x_0$ și $x+dx-x_0$ este, în consecință,

$$W(x)\,dx=1\Big/\left(\frac{4}{3}\pi\bar{v}\lambda_s t\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{3}{4\bar{v}\lambda_s t}\cdot(x-x_0)^2\right)dx.$$

Dacă presupunem că am făcut experiența noastră nu cu un neutron, ci cu mai mulți, atunci putem trece de la o probabilitate la densitatea de neutroni care trebuie să fie proporțională cu probabilitatea $W(x)$

$$n(x,t)dx=\frac{n_0\,dx_0}{\left(\frac{4}{3}\pi\bar{v}\lambda_s t\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left(-\frac{3}{4\bar{v}\lambda_s t}(x-x_0)^2\right)dx. \qquad (2.97)$$

Aici n_0dx_0 este numărul de neutroni care au fost conținuți la momentul $t=0$, în punctul x_0, într-un element de volum cu baza de 1 cm^2 și înălmea dx_0, adică $n_0dx_0=n(x_0,\,0)dx_0$. Totuși, la momentul $t=0$ neutronii ar putea să nu fie în punctul $x=x_0$, ci în toate celelalte puncte. Din fiecare astfel de punct x_0, ei difuzează în ambele direcții. Neutronii ce vin din toate elementele de volum dx_0 către x_0 sînt adăugați la neutronii care sosesc prin difuzie într-un alt element de volum dx la x. În consecință, obținem numărul de neutroni din dx, prin integrarea tuturor surselor distribuite pe x_0

$$n(x,t)dx=\frac{dx}{\left(\frac{4}{3}\pi\bar{v}\lambda_s t\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}n(x_0)\exp\left(-\frac{3}{4\bar{v}\lambda_s t}(x-x_0)^2\right)dx_0. \qquad (2.98)$$

Prin două diferențieri parțiale în raport cu x și una în raport cu t obținem ecuația diferențială care descrie procesul unidimensional de difuzie

$$\frac{\lambda_s}{3}\bar{v}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}=\frac{\partial n}{\partial t} \qquad (2.99)$$

și, deoarece am lucrat cu neutroni monoenergetici, putem introduce $\bar{v}$ sub diferențială și astfel, ținînd seamă că $n\bar{v}=\Phi$, și

$$\frac{\lambda_s}{3}=D, \qquad (2.100)$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem ecuația de difuzie cunoscută pentru neutroni monoenergetici

$$D\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial n}{\partial t}.$$

Desigur, calculele pot fi generalizate pentru cazul tridimensional

$$D\cdot\nabla^2\Phi=\frac{\partial n}{\partial t}. \tag{2.101}$$

7. Drumul liber mijlociu de transport

La deducerea constantei de difuzie D am presupus că nucleele difuzante nu se pun în mișcare prin ciocnirile cu neutronii. În realitate, aceasta este valabil numai pentru nucleele foarte grele. Neutronii suferă majoritatea ciocnirilor în reactor cu nuclee de moderator care trebuie, de fapt, să fie cît mai ușoare posibil. Așa cum am văzut, în paragraful 2.3, nucleele de moderator în acest caz preiau o parte a impulsului adus de neutron. Consecința este că neutronul pare să parcurgă un drum mediu între două ciocniri ceva mai lung decît λ_s, antrenînd nucleul de moderator o bucată de drum la fiecare ciocnire.

În paragraful 2.3 am întîlnit două unghiuri de împrăștiere, ψ și θ. ψ era unghiul de împrăștiere în sistemul L, în care nucleul de moderator era considerat în repaus înainte de ciocnire. θ era unghiul de împrăștiere în sistemul centrului de masă, în care centrul de masă era în repaus. Împrăștierea în sistemul centrului de masă era izotropă, adică distribuția unghiulară a împrăștierii era aceeași în întreg unghiul solid și era deci independentă de unghiul de împrăștiere θ. Că aceasta nu este adevărat în sistemul L rezultă din ecuația (2.44), care conține relația între ψ și θ; dacă mediem $\cos\psi$ pe întreg unghiul solid Ω

$$\overline{\cos\psi}=\frac{\int_0^{\pi}[1+A\cos\theta/(1+A^2+2A\cos\theta)^{1/2}]\cdot 2\pi\sin\theta\,d\theta}{\int_0^{\pi}2\pi\sin\theta\,d\theta}=\frac{2}{3A} \tag{2.102}$$

obținem o valoare pozitivă. Unghiul mediu de împrăștiere în sistemul L nu este zero, așa cum este cosinusul mediu al unghiului de împrăștiere θ în sistemul centrului de masă, ci are loc o împrăștiere preferențială care devine cu atît mai largă cu cît numărul de masă al nucleului de moderator este mai mic. Pentru nucleele foarte grele de moderator,

Scanned with OKEN Scanner

desigur sistemul centrului de masă se confundă cu sistemul L şi cosinusul mediu al unghiului de împrăştiere $\overline{\cos \psi}$ tinde la zero.

Cu ajutorul fig. 2.9, creşterea aparentă a drumului liber mijlociu poate fi evaluată aproximativ prin calcularea acestei creşteri pentru o singură ciocnire.

Dacă neutronul se deplasează în direcţia x de la un nucleu A de moderator către un al doilea nucleu, B, aflat la o distanţă λ_s, acolo el este deviat sub un unghi ψ, al cărui cosinus mediu este dat de ecuaţia (2.102). El se deplasează mai departe sub un unghi ψ, o distanţă λ_s şi îl întîlneşte un nucleu C, care îl deviază din nou, ca şi mai înainte. Creşterea aparentă a lui λ_s (vezi fig. 2.9) are valoarea

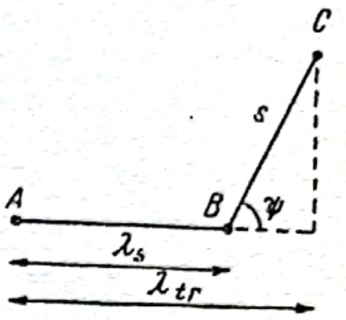


Fig. 2.9. Drumul liber mijlociu de transport.

$$\lambda_{tr} - \lambda_s = \lambda_{tr} \overline{\cos \psi}$$

sau

$$\lambda_{tr} = \frac{\lambda_s}{1 - \overline{\cos \psi}} = \frac{\lambda_s}{1 - 2/3A} \qquad (2.103)$$

λ_{tr} fiind numit drum liber mijlociu de transport. În general, el apare în locul drumului liber mijlociu de împrăştiere, acolo unde avem de-a face cu împrăştierea neutronilor de către nuclee uşoare.

8. Formula celor patru factori pentru reactorul omogen

În paragraful 1.3 a fost descris calitativ ciclul neutronului sau istoria existenţei lui, în reactor, din momentul apariţiei lui ca neutron de fisiune pînă la absorbţia lui de către un nucleu fisionabil şi formarea neutronilor de fisiune corespunzători acestui proces. În acest paragraf, ciclul neutronului va fi tratat cantitativ cu ajutorul aşa-numitei *formule a celor patru factori*. Această teorie serveşte la completarea ecuaţiei de difuzie pentru neutronii termici, în care termenul sursă q_{th} a neutronilor termici deocamdată lipseşte.

Calculul în continuare al cantităţii q_{th} se va face prin împărţirea întregului ciclu al neutronului în părţi şi făcînd un bilanţ pentru fiecare parte, adică stabilind cîţi din neutronii care intră într-o etapă o părăsesc şi cîţi se pierd la trecerea prin această etapă.

Scanned with OKEN Scanner

Să reprezentăm ciclul neutronului cu ajutorul fig. 2.10. Desigur, acum idealizăm din nou reactorul, presupunînd că nici un neutron nu se scurge în afara sa, nici în domeniul de încetinire și nici în cel termic. Cu alte cuvinte, considerăm un reactor infinit.

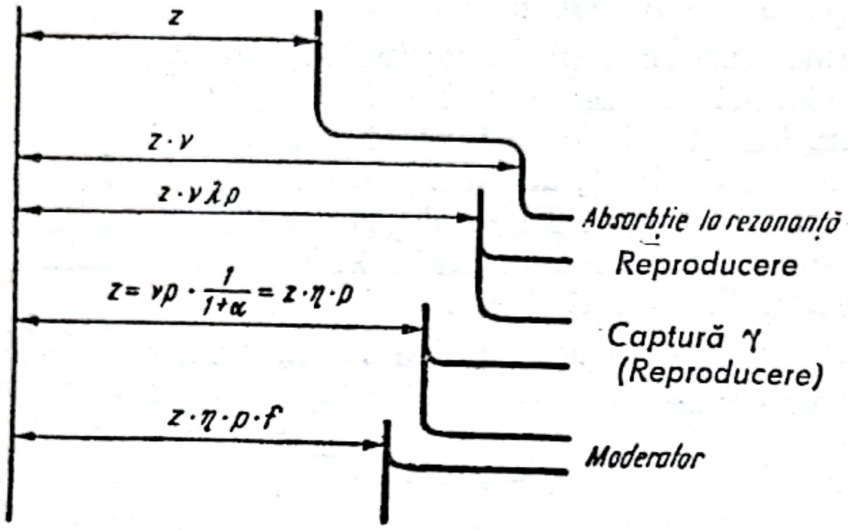


Fig. 2.10. Ciclul neutronului într-un reactor infinit, omogen. Pentru un reactor omogen s-ar ține seama de factorul ε. Pentru un reactor de dimensiuni finite ar trebui arătată scurgerea de neutroni rapizi și termici.

Fig. 2.10 arată istoria vieții a z neutroni care încep ciclul. Etapele ciclului de viață al neutronului se succed de sus în jos pe diagramă, în timp ce acei neutroni care se pierd se ramifică către dreapta. În fiecare caz, numărul de neutroni este indicat prin lățimea curbei și lungimea săgeților duble orizontale.

Începem descrierea ciclului neutronului în momentul fisiunii uraniului.

Să presupunem că z neutroni termici fisionează z nuclee de uraniu. La fiecare din aceste fisiuni, obținem, așa cum s-a arătat la început, un număr de noi neutroni de fisiune. În cazul U-235 acel număr este în medie $\nu_{235}=2{,}47$, în cazul U-233, $\nu_{233}=2{,}55$ neutroni. La Z fisiuni obținem deci z^{ν} noi neutroni de fisiune.

a) *Probabilitatea de evitare a capturii (factorul p)*

Neutronii care apar la fisiune ca neutroni rapizi se mișcă haotic și se ciocnesc cu nucleele, în special cu nucleele de moderator. În acest mod ei pierd treptat din energia lor, pînă cînd devin termici, adică pînă ce sînt în echilibru termic cu atomii din reactor.

Scanned with OKEN Scanner

În teoria încetinirii, ca și în teoria difuziei neutronilor rapizi, am presupus că nici un neutron nu se pierde în timpul procesului de încetinire prin absorbție în reactor. Acum modificăm puțin această condiție afirmînd că densitatea de încetinire q trebuie să fie esențial independentă de energia neutronului, dar că totuși în anumite regiuni energetice are loc o slabă absorbție. Aceste regiuni energetice înguste sînt picurile de rezonanță care au fost arătate în fig. 1.5. Dacă în timpul încetinirii sale, un neutron atinge energia la care un nucleu este capabil să-l captureze cu mare probabilitate (la rezonanță) și dacă în același timp el întîlnește în drumul său un astfel de nucleu, atunci există o anumită probabilitate ca el să fie absorbit.

Deoarece, în general, există cîteva picuri de rezonanță în regiunea de deasupra energiei termice, neutronii care traversează această energie adesea riscă să fie absorbiți. Scopul nostru acum este de a calcula probabilitatea ca un neutron să evite captura prin rezonanță în timpul procesului de încetinire.

Să considerăm un interval îngust de energie dE ce conține un pic îngust de rezonanță la energia E. Numărul de ciocniri pe care neutronul trebuie să le sufere pentru a traversa zona de energie dE, este, conform ecuației (2.51), $(dE/E)/\xi$. În interiorul intervalului de energie dE, el poate fi deviat de către un nucleu — de preferință un nucleu de moderator — sau capturat la un pic de rezonanță, de exemplu, de un nucleu de U-238. Probabilitatea de captură este $\Sigma_a(E)/[\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)]$. Aici $\Sigma_a(E)$ este secțiunea eficace macroscopică de absorbție, de exemplu pentru U-238, la energia E în regiunea dE[1] și Σ_s secțiunea de împrăștiere macroscopică (a moderatorului și uraniului). Probabilitatea totală ca un neutron să fie absorbit în intervalul de energie dE este

$$\frac{1}{\xi}\frac{dE}{E}\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)}.$$

Numărul dq de neutroni care sînt absorbiți în intervalul de energie dE este egal cu numărul q de neutroni care au atins limita superioară a lui dE înmulțit cu probabilitatea calculată mai sus. Astfel

$$dq=-q\,\frac{1}{\xi}\frac{dE}{E}\cdot\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)}. \qquad (2.104)$$

Semnul minus înseamnă că numărul neutronilor ce încă nu au fost absorbiți devine cu atît mai mic cu cît energia crește în sens pozitiv. Dacă se integrează acum ecuația (2.104) de la energia termică pînă la

[1]) Este de notat că aceste secțiuni eficace sînt puternic dependente de energie. Ele nu trebuie confundate cu secțiunile eficace termice. Pentru indicarea acestei deosebiri în domeniul rezonanțelor, secțiunile eficace sînt descrise în funcție de energie.

Scanned with OKEN Scanner

limita superioară a intervalului energetic cu rezonanţe, se obţine pentru numărul de neutroni ce evită captura de rezonanţă şi devin termici, valoarea

$$q_{th}=q_f\exp\left(-\frac{1}{\xi}\int_{E_{th}}^{E_f}\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)}\frac{dE}{E}\right) \tag{2.105}$$

în care q_f este numărul de neutroni de fisiune ce au fost produşi pe cm³ şi secundă. În consecinţă, probabilitatea ca un neutron să evite captura de rezonanţă în timpul procesului de încetinire este

$$p=q_{th}/q_f=\exp\left(-\frac{1}{\xi}\int_{E_{th}}^{E_f}\frac{\Sigma_a(E)}{\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)}\frac{dE}{E}\right). \tag{2.106}$$

Ecuaţia (2.106) este adesea întîlnită într-o formă oarecum diferită

$$p=\exp\left(-\frac{N_u}{\xi\Sigma_s}\int_{E_{th}}^{E_f}(\sigma_{au}(E))_{ef}\frac{dE}{E}\right). \tag{2.107}$$

Aici N_u este numărul de atomi de uraniu pe cm³ care sînt implicaţi în captura de rezonanţă, de exemplu, atomii de U-238, $(\sigma_{au}(E))_{ef}$ este aşa-numita *secţiune eficace de absorbţie*,

$$(\sigma_{au}(E))_{ef}=\frac{\Sigma_s(E)}{\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)}\cdot\sigma_{au}(E) \tag{2.108}$$

în care $\sigma_{au}(E)$ este secţiunea eficace de absorbţie microscopică reală şi $\Sigma_s(E)/[\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)]$, probabilitatea ca un neutron să fie împrăştiat şi nu absorbit. Integrala $\int(\sigma_{au}(E))_{ef}dE/E$ este numită „integrală efectivă de rezonanţă". Integrala efectivă de rezonanţă este adesea dată sub formă de tabele sau curbe. În esenţă, ea este dependentă de mărimea Σ_s/N_u, adică de secţiunea de împrăştiere microscopică pe atom de uraniu. Fig. 2.11 arată dependenţa integralei efective de rezonanţă de secţiunea de împrăştiere pe atom, pentru uraniu-238 şi toriu-232.

Deoarece, cu excepţia lui ξ, întregul exponent din ecuaţia (2.107) este dependent, în principal, numai de secţiunea eficace pe atom de combustibil, $\Sigma_s/N_u=\sigma_sN_s/N_u$, factorul p este dependent, pînă la o constantă atomică, numai de raportul $N_s/N_u=m$, aşa numitul *raport de moderare*, şi anume cu cît este mai mare raportul dintre numărul de atomi de moderator şi de numărul de atomi de uraniu din reactor, cu atît devine mai mare factorul p.

Scanned with OKEN Scanner

Deducerea factorului p dată aici, se aplică în sensul strict al cuvîntului, numai la cazul unei absorbţii slabe, adică sau pentru secţiune de absorbţie foarte mică în regiunea de rezonanţă, sau pentru picuri foarte

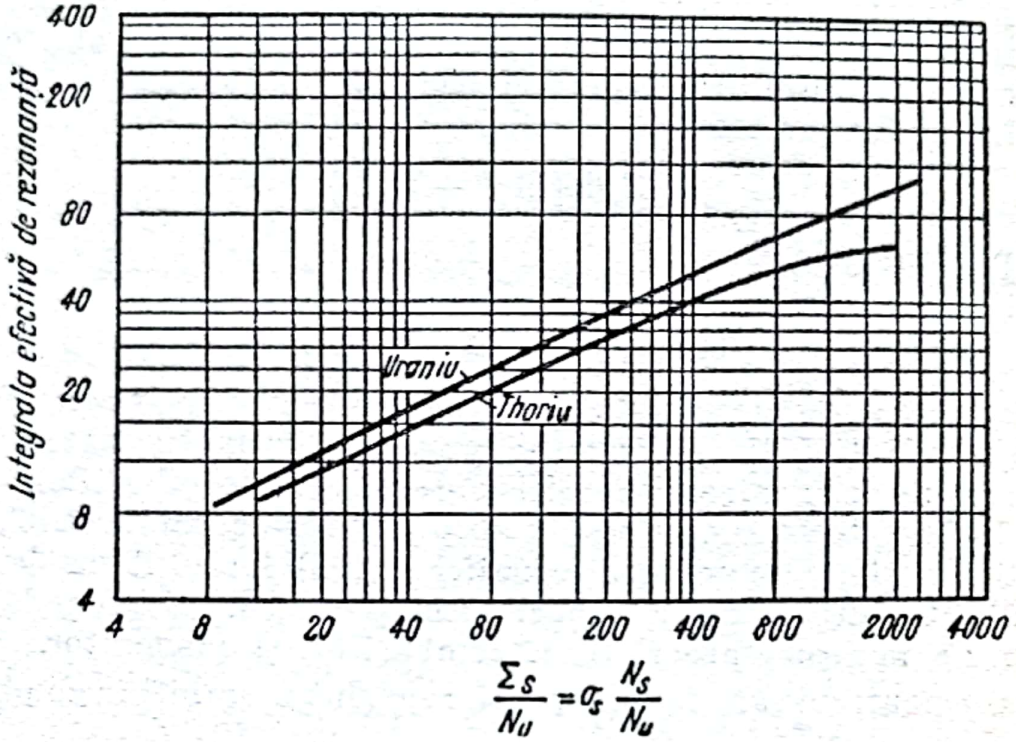


Fig. 2.11. Integrala efectivă de rezonanţă pentru uraniu-238 şi toriu-232.

înguste. Mai mult, din motivele arătate în paragraful 2.4, picurile de rezonanţă nu pot fi prea apropiate unul de altul. Că formula noastră nu este valabilă în cazul absorbţiei la rezonanţă puternice, rezultă din faptul că cantitatea $\Sigma_a(E)/[\Sigma_a(E)+\Sigma_s(E)]$ nu poate fi egalată în acest caz cu probabilitatea de absorbţie a unui neutron.

Datorită rezonanţei de captură, numărul $z \cdot \nu$ de neutroni din fig. 2.10 este redus la $z \cdot \nu \cdot p$ neutroni. Numărul de neutroni $z \cdot \nu \cdot (1-p)$ care sînt capturaţi servesc, în principal, la producerea de plutoniu sau, respectiv, uraniu-233; într-o măsură mai mică ei sînt capturaţi fără folos. Astfel $z\nu p$ neutroni devin termici.

b) *Factorul f*

Neutronii termici se mişcă cu o viteză medie constantă în amestecul de combustibil şi moderator, pînă cînd ei sînt absorbiţi de nuclee. În majoritate, desigur, ei sînt absorbiţi de nucleele de combustibil, dar un anumit procent este absorbit în materialul moderator şi mai ales de

Scanned with OKEN Scanner

impurităţile conţinute în el. Acest procent trebuie, desigur, să fie cît mai mic posibil pentru a păstra cît mai mulţi neutroni pentru fisionarea atomilor de uraniu.

Dacă Σ_u este secţiunea eficace de absorbţie macroscopică a întregului combustibil şi Σ_m pentru moderator, atunci raportul dintre numărul de neutroni absorbiţi pe cm³ şi secundă în combustibil şi cei absorbiţi în moderator este

$$f = \Sigma_u \Phi / [\Sigma_u \Phi + \Sigma_m \Phi]$$

sau, împărţind prin Φ,

$$f = \frac{\Sigma_u}{\Sigma_u + \Sigma_m}. \tag{2.109}$$

Raportul dat de ecuaţia (2.109) este numit „*factor f*“ sau „*factor de utilizare termică*“. Ultima denumire provine din faptul că mărimea f dă procentul de neutroni termici absorbiţi în combustibil; într-un reactor infinit, toţi neutronii sînt absorbiţi fie de combustibil, fie de moderator, astfel că numitorul ecuaţiei (2.109) înmulţit cu Φ dă atît numărul total de neutroni termici formaţi pe cm³ şi secundă, cît şi numărul de neutroni absorbiţi în combustibil şi moderator.

Din $z\nu p$ neutroni care devin termici, $z\nu pf$ sînt absorbiţi în combustibil.

c) *Factorul* η

Nu toţi cei $z\nu pf$ neutroni termici absorbiţi în combustibil duc la noi fisiuni în uraniu. O mică fracţiune din neutroni sînt pierduţi, fie fiind capturaţi inutil, fie pentru reproducere, dacă este prezent U^{238} sau Th^{232}.

Definind o secţiune macroscopică de fisiune Σ_f şi o secţiune macroscopică corespunzătoare pentru celelalte reacţii, atunci, din $z\nu pf$ neutroni ce se mişcă în combustibil, fracţiunea

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_f + \Sigma_\gamma} = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_u}, \quad \text{unde } \alpha = \frac{\Sigma_\gamma}{\Sigma_f} \tag{2.110}$$

va produce fisiune şi deci noi neutroni. Σ_γ este secţiunea eficace de absorbţie a neutronilor în combustibil fără a produce fisiune. De obicei, se combină factorii $1/1+\alpha$ şi ν într-unul singur

$$\eta = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \nu = \nu \cdot \frac{\Sigma_f}{\Sigma_f + \Sigma_\gamma}; \tag{2.111}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest lucru se face pentru a ordona diferiţii factori după domeniul în care acţionează. Astfel, ε[1] şi p se referă la neutronii rapizi şi regiunea de încetinire, f şi η la neutronii termici şi dintre ei f se referă la moderator, iar η la combustibil.

Uneori factorul η este dat separat pentru fiecare component al combustibilului.

d) *Factorul* ε

Factorul ε joacă un rol aparte în teoria reactorilor eterogeni şi deci va fi discutat, de asemenea, în cap. 4. Aici el este menţionat numai pentru a completa discuţia, deoarece de obicei intervine împreună cu ceilalţi trei factori η, f şi p. În reactorii omogeni, $\varepsilon=1$.

Factorul ε ia în consideraţie fisiunea cu neutroni rapizi. Se ştie că majoritatea fisiunilor uraniului are loc sub influenţa neutronilor termici. Noi am notat factorul de multiplicare pentru acest tip de fisiune cu ν, însă o mică parte a atomilor de uraniu fisionează de asemenea cu neutroni rapizi. Factorul de multiplicare respectiv este ε.

e) *Factorul de multiplicare* k_∞

Acum ciclul este încheiat; numărul $z\varepsilon p\eta f$ este numărul de neutroni pe fisiune care produc noi fisiuni. Dacă se notează produsul celor patru factori cu k_∞

$$k_\infty=\varepsilon\cdot\eta\cdot p\cdot f \qquad (2.112)$$

atunci k_∞ este o măsură a numărului de neutroni rezultaţi din fiecare fisiune de uraniu. Sau, cu alte cuvinte, din ecuaţia (2.112) putem afla cîţi neutroni putem folosi pe fisiune pentru alte scopuri decît acela de a menţine reacţia în lanţ. Să presupunem, de exemplu, că lucrăm cu un reactor cu amestec de U^{235} şi U^{238} şi grafit ca moderator. Pentru un raport particular de amestec, obţinem, de exemplu, următoarele valori

$$\eta=1{,}9;\ p=0{,}7;\ f=0{,}84;\ \varepsilon=1.$$

Din aceasta rezultă $k_\infty=1{,}11$. Dintre aceşti 1,11 neutroni care rămîn după o fisiune, unul este folosit pentru o nouă fisiune şi astfel reacţia în lanţ continuă. 0,11 neutroni rămîn la dispoziţia noastră. Totuşi, trebuie să ne reamintim că ecuaţia (2.112) descrie bilanţul de neutroni corect,

[1] Factorul ε va fi explicat în paragraful următor.

Scanned with OKEN Scanner

numai pentru un reactor infinit. Nu s-a făcut nici o apreciere a fracțiunii de neutroni care se scurge prin pereții reactorului. Într-un reactor real rămîn mai puțin de 0,11 neutroni pe fisiune.

9. Ecuația difuziei

Să revenim acum, mai detaliat, asupra ecuației de difuzie a neutronilor termici, ecuația (2.26), pentru a aplica considerațiile precedente. În ecuația (2.26) am scris că termenul sursă q_{th} este proporțional cu fluxul de neutroni termici. Sîntem acum în măsură să calculăm acest factor de proporționalitate.

Să considerăm un cm³ din zona activă a reactorului. În acest cm³ sînt absorbiți pe secundă $\Sigma_a\Phi$ neutroni termici, dacă Σ_a este secțiunea de absorbție macroscopică a neutronilor și Φ fluxul de neutroni. Toți atomii conținuți în cm³ considerat participă la secțiunea de absorbție Σ_a, atît cei de combustibil, cît și cei de moderator.

Din acești $\Sigma_a\Phi$ neutroni, fracțiunea $f\Sigma_a\Phi$ este absorbită în combustibil și fracțiunea $(1-f)\Sigma_a\Phi$ în moderator. Din $f\Sigma_a\Phi$ neutroni, numai fracțiunea $[1/(1+\alpha)]f\Sigma_a\Phi$ ajunge din nou să producă fisiune și ei produc $[\nu/(1+\alpha)]\cdot f\cdot\Sigma_a\Phi=\eta\cdot f\cdot\Sigma_a\Phi$ neutroni de fisiune. Am descris în detaliu istoria vieții neutronilor în regiunea de încetinire, din momentul apariției lor pînă cînd ei devin termici. O parte din ei se scurg în afara reactorului în timpul încetinirii. Rămîn $P_f=\exp(-B^2\tau)$, unde B este factorul geometric (buckling) despre care va fi vorba în paragraful următor și τ, vîrsta Fermi pentru neutronii termici. Însă numai fracțiunea p a neutronilor ce rămîne în reactor în timpul încetinirii atinge pragul termic. Restul este reținut în picurile de rezonanță. În final, din $\Sigma_a\Phi$ neutroni termici absorbiți, un număr de $\exp(-B^2\tau)p\eta f\Sigma_a\Phi$ devin din nou termici. Dacă avem de-a face cu un reactor eterogen, trebuie să admitem pentru fisiunile produse de neutronii rapizi, direct factorul ε. Combinăm din nou formula celor patru factori $\varepsilon\cdot p\cdot\eta\cdot f$ în factorul de multiplicare k_∞ și obținem

$$q_{th}=\Sigma_a\exp(-B^2\tau)k_\infty\Phi \tag{2.113}$$

reprezentînd numărul de noi neutroni termici produși pe cm³ și secundă.

Ecuația de difuzie pentru neutronii termici acum devine

$$D\nabla^2\Phi-\Sigma_a\Phi+k_\infty\Sigma_a\exp(-B^2\tau)\Phi=\frac{\partial n}{\partial t} \tag{2.114}$$

unde τ reprezintă acum întotdeauna vîrsta Fermi pentru neutronii care devin termici. Remarcăm că această ecuație de difuzie pentru neutronii

Scanned with OKEN Scanner

termici este de același tip cu ecuația (2.81), care a fost dedusă pentru neutronii rapizi, și dacă transcriem ecuația (2.114) pentru cazul stării de echilibru, obținem

$$\nabla^2\Phi+[k_\infty\exp(-B^2\tau)-1]\frac{\Sigma_a}{D}\Phi=0. \qquad (2.115)$$

În locul funcției $R(\vec{r})$ dependentă numai de poziție, în ecuația (2.82) există acum funcția $\Phi(\vec{r})$ dependentă în mod asemănător numai de poziție. Constanta $[k_\infty\exp(-B^2\tau)-1]\Sigma_a/D$ aici corespunde constantei B^2 din ecuația (2.84). De fapt, aceste două constante sînt egale adică

$$B^2=\frac{\Sigma_a}{D}[k_\infty\exp(-B^2\tau)-1]. \qquad (2.116)$$

Aceasta, deoarece cele două ecuații (2.81) și (2.114) nu sînt numai de același tip, ci au de asemenea aceleași condiții la limită. S-a spus întotdeauna că constanta B^2 din ecuația (2.84) este dependentă numai de forma și volumul reactorului. Aceeași afirmație este valabilă pentru constanta $[k_\infty\exp(-B^2\tau)-1]\Sigma_a/D$. Dacă cerem acum ca densitatea de încetinire $q(\vec{r},\tau)$ și, de asemenea, $R(\vec{r})$ să tindă la zero la marginea, reactorului, precum și fluxul neutronilor $\Phi(\vec{r}, t)$ din ecuația (2.114), atunci rezultă egalitatea constantei B^2 din ecuația (2.81) cu constanta $[k_\infty\exp(-B^2\tau)-1]\Sigma_a/D$ din ecuația (2.115). În baza ecuației (2.116), (2.114) poate fi acum transcrisă sub forma

$$\nabla^2\Phi+B^2\Phi=\frac{1}{D}\frac{\partial n}{\partial t}(=0 \text{ în starea de echilibru}); \qquad (2.117)$$

însă în cele ce urmează vom considera numai starea de echilibru. Am arătat în cursul discuției ecuației de difuzie din paragraful 2.2 că termenul $\nabla^2\Phi$ era o parte a ecuației reprezentînd pierderea de neutroni din reactor și cantitatea $B^2\Phi$ reprezintă acum pierderea de neutroni conform ecuației (2.117). Pe de altă parte, în cazul stării de echilibru $DB^2\Phi=\Sigma_a[k_\infty\exp(-B^2\tau)-1]\Phi$ este numărul de neutroni termici ce se formează pe secundă și cm^3, mai puțin aceia care sînt absorbiți și reprezintă deci numărul de neutroni ce scapă. Astfel ecuația (2.115) nu spune nimic mai mult decît că la funcționarea în regim de echilibru, numărul de neutroni termici care se scurg în unitatea de timp este egal cu numărul de noi neutroni care se formează, minus numărul de neutroni termici care sînt absorbiți.

Să scriem ecuația (2.116) puțin diferit și să introducem doi noi parametri. În primul rînd să punem $D/\Sigma_a=L^2$. Cantitatea L este numită

Scanned with OKEN Scanner

„*lungime de difuzie*" a neutronilor termici. A doua cantitate pe care o introducem acum este „*factorul efectiv de multiplicare*", k_{ef}

$$k_{ef} = \frac{k_\infty \exp(-B^2\tau)}{1+L^2B^2} \ (=1 \text{ pentru starea de echilibru}). \qquad (2.118)$$

Factorul efectiv de multiplicare joacă acelaşi rol într-un reactor finit ca factorul de multiplicare k_∞ pentru un reactor infinit.

Aceasta înseamnă, că şi la funcţionarea reactorului infinit în regim de echilibru, cînd $k=1$, deoarece producerea neutronilor este atunci exact egală cu numărul de neutroni absorbiţi, factorul efectiv de multiplicare k_{ef} trebuie de asemenea să fie egal cu unitatea într-un reactor finit, dacă el funcţionează în regim staţionar. Pentru acest caz, ecuaţia (2.118) este identică cu (2.116). Deoarece la funcţionarea în regim staţionar, k_{ef} este întotdeauna egal cu unitatea, apare problema de ce introducem un nou simbol pentru o cantitate care oricum este egală cu unitatea. Această întrebare poate căpăta un răspuns dacă tratăm comportarea nestaţionară a reactorului. În cazul nestaţionar, k_{ef} poate diferi puţin de unitate. Diferenţa relativă, $(k_{ef}-1)/k_{ef}=\delta$ este numită „*reactivitate*". Am pus $k_{ef}=(1)_{st}$, în ecuaţia (2.118), care indică că această condiţie este valabilă numai cînd reactorul funcţionează în regim staţionar În acest caz ecuaţia (2.118) este numită „*condiţie de criticitate*" a reactorului şi reactorul este numit critic dacă ecuaţia (2.118), sau (2.116) care este similară, este respectată.

Foarte adesea, exponentul $B^2\tau$ din ecuaţia (2.118) este atît de mic, încît cu o bună aproximaţie putem înlocui $\exp(-B^2\tau)$ cu $1-B^2\tau$. Deoarece B^2L^2 este, în general, mult mai mic decît unitatea, se poate scrie în acest caz, ca o bună aproximaţie

$$k_{ef} = \frac{k_\infty}{1+B^2M^2} \qquad (2.119)$$

în locul ecuaţiei (2.116) unde am introdus de asemenea o nouă cantitate, $M^2=L^2+\tau$, aşa-numita „*arie de migraţie*" a neutronilor.

Cantitatea L^2 poate fi explicată asemănător, pe calea pe care am explicat vîrsta Fermi în ecuaţia (2.80). Singura diferenţă este că la vîrsta Fermi am avut de-a face cu neutroni rapizi cu viteză variabilă, în timp ce în cazul lungimii de difuzie $L=D/\Sigma_a$ avem de-a face cu neutroni termici.

Vom proceda în acelaşi mod ca la deducerea ecuaţiei (2.80), alegînd modelul nostru pentru difuzia de neutroni astfel că la $r=0$ avem o sursă punctuală de neutroni termici care difuzează în mediul înconjurător infinit. Să neglijăm faptul că în urma absorbţiei neutronilor în uraniu sînt produşi noi neutroni şi deci considerăm numai absorbţia

Scanned with OKEN Scanner

neutronilor, nu şi formarea lor. Un astfel de caz de difuzie a neutronilor este descris de ecuaţia (2.115), unde termenul sursă este neglijat

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{\Sigma_a}{D}\Phi = \frac{1}{L^2}\Phi.$$

Soluţia ecuaţiei în acest caz este

$$\Phi(r) = A \cdot \exp(-r/L)/r$$

unde A este o constantă. Calculul valorii medii a pătratului distanţei pe care neutronii o parcurg din poziţia $r=0$, pînă sînt absorbiţi în moderator, se face în modul obişnuit

$$\overline{r^2} = \frac{\int_0^\infty r^2 \frac{\exp(-r/L)}{r} 4\pi r^2\, dr}{\int_0^\infty \frac{\exp(-r/L)}{r} 4\pi r^2\, dr} = 6L^2. \qquad (2.120)$$

Astfel L^2 este 1/6 din valoarea medie a pătratului distanţei pe care un neutron o parcurge din locul din reactor în care el devine termic, pînă este absorbit. Deoarece vîrsta Fermi pentru neutronii termici este egală cu 1/6 din media pătratului distanţei pe care neutronul o parcurge în timpul încetinirii, din momentul apariţiei sale ca neutron de fisiune pînă cînd el devine termic, suma acestor două cantităţi sau mai bine, rădăcina pătrată a sa,

$$M = (L^2 + \tau)^{1/2}$$

este o măsură a distanţei pe care neutronul o parcurge în reactor din locul său de apariţie ca neutron de fisiune, pînă ce el este absorbit.

Se doreşte întotdeauna ca această lungime de migraţie M să fie cît mai mică posibil; vedem din ecuaţia (2.119) că termenul M^2B^2, care măsoară scurgerea neutronilor rapizi cît şi a celor termici, creşte cu lungimea de migraţie. Cu cît este mai mare M^2 în ecuaţia (2.119), cu atît trebuie să fie mai mare k_∞ pentru ca condiţia critică $k_{ef}=1$ să fie îndeplinită.

Factorul geometric B

Valoarea lui B depinde de dimensiunile şi forma zonei active a reactorului. Numim factorul B „geometric", deoarece, aşa cum vom vedea mai tîrziu, B este o măsură a curburii funcţiei de flux $\Phi(\vec{r})$ în zona activă a reactorului. Pentru a determina factorul geometric trebuie să rezolvăm ecuaţia (2.115)—sau respectiv (2.117)—cu condiţiile la limită corespunzătoare formei reactorului.

Scanned with OKEN Scanner

Să rezolvăm la început ecuaţia (2.117) (pentru starea de echilibru), în cel mai simplu caz al reactorului paralelipipedic.

Conform ecuaţiei (2.25), operatorul ∇^2 este mai convenabil să fie scris sub forma $\nabla^2=(\partial^2/\partial x^2)+(\partial^2/\partial y^2)+(\partial^2/\partial z^2)$ pentru calculul unui reactor de această formă, şi astfel ecuaţia (2.117) devine

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+B^2\Phi=0. \tag{2.121}$$

Dacă aplicăm şi aici considerente similare cu cele aplicate ecuaţiei (2.81) şi presupunem o soluţie separabilă de forma

$$\Phi=X(x)Y(y)Z(z) \tag{2.122}$$

în care $X(x)$ este o funcţie ce depinde numai de x, $Y(y)$ numai de y şi $Z(z)$ numai de z, atunci înlocuind această soluţie în ecuaţia (1.121) şi împărţind prin $X\cdot Y\cdot Z$, se obţine

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-B^2. \tag{2.123}$$

Deoarece X, Y şi Z sînt funcţii ce nu depind una de alta, $(1/X)d^2X/dx^2$; $(1/Y)d^2Y/dy^2$ şi $(1/Z)d^2Z/dz^2$ trebuie să fie cantităţi constante, pe care le vom nota cu $-k_x^2$, $-k_y^2$ şi $-k_z^2$ şi, conform ecuaţiei (2.123),

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=B^2. \tag{2.124}$$

Din

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0,\quad \frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0 \quad \text{şi} \quad \frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2Z=0$$

rezultă că

$$X=X_0\cos k_xx,\quad Y=Y_0\cos k_yy,\quad Z=Z_0\cos k_zz$$

şi de aici, cu ajutorul relaţiei (2.122),

$$\Phi=\Phi_0\cos k_xx\cos k_yy\cos k_zz. \tag{2.125}$$

Am obţinut astfel numai soluţiile ecuaţiilor diferenţiale care sînt simetrice faţă de origine, care este centrul reactorului. X_0, Y_0, Z_0 sînt valorile maxime ale funcţiilor X, Y, Z şi $\Phi_0=X_0Y_0Z_0$ este fluxul de neutroni în centrul reactorului.

Acum vom trece la stabilirea condiţiilor la limită. Aceasta se face presupunînd că fluxul de neutroni va deveni neglijabil la peretele reactorului. În plus, trebuie precizat că Φ înseamnă fluxul statistic de neutroni care este o măsură a densităţii de neutroni din reactor. Totuşi, în exteriorul reactorului densitatea de neutroni este luată egală cu

Scanned with OKEN Scanner

zero, pentru neutronii care din întîmplare au scăpat în afara reactorului, prin pereți și nu mai revin înapoi, afară de cazul cînd zona activă este înlocuită cu un material difuzant, adică cu un reflector. Acest caz nu e considerat aici. În timp ce fluxul statistic la marginea reactorului este egal cu zero, fluxul direct care l-am notat cu j este finit aici și, în particular, destul de mare.

Să considerăm că pereții reactorului în formă de bloc sînt planele

$$x=\pm\frac{x_1}{2}\quad y=\pm\frac{y_1}{2}\quad z=\pm\frac{z_1}{2};$$

x_1, y_1, z_1 sînt astfel lungimile laturilor zonei active a reactorului. Condiția la limită, că $\Phi=0$ la nivelul tuturor acestor plane, fixează valorile lui k_x, k_y și k_z, astfel că avem

$$k_x=\frac{\pi}{x_1},\quad k_y=\frac{\pi}{y_1},\quad k_z=\frac{\pi}{z_1}.$$

Soluția ecuației (2.125) devine

$$\Phi=\Phi_0\cos\frac{\pi}{x_1}x\cos\frac{\pi}{y_1}y\cos\frac{\pi}{z_1}z \tag{2.126}$$

și din ecuația (2.124) avem

$$B^2=\pi\left[\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{z_1^2}\right]. \tag{2.127}$$

Pe această cale, am înlocuit expresia constantei B^2, care mai înainte era nedeterminată, pentru reactorul paralelipipedic rectangular, în funcție de dimensiunile zonei active x_1, y_1 și z_1 și astfel se confirmă afirmația făcută la început că mărimea B^2 depinde de forma și dimensiunile reactorului.

Reactorul sferic

Deși nu are o importanță tehnică, reactorul sferic este adesea de ajutor la estimarea dimensiunilor critice. Din această cauză propunem să-l discutăm pe scurt aici.

Pentru a rezolva ecuația de difuzie (2.115) pentru cazul simetriei sferice, vom alege o formă convenabilă a operatorului ∇^2. Conform ecuației (2.30), $\nabla^2\equiv(\partial^2/\partial r^2)+(2/r)(\partial/\partial r)$. Astfel, ecuația (2.115) devine

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}=-B^2\Phi. \tag{2.128}$$

Scanned with OKEN Scanner

O soluţie a ecuaţiei (2.128) este

$$\Phi = \Phi_0 \frac{\sin Br}{Br} \tag{2.129}$$

ceea ce se poate vedea înlocuind soluţia (2.129) în ecuaţia (2.128). Soluţia (2.129) este o funcţie simetrică faţă de originea $r=0$, care desigur este plasată în centrul reactorului. Din nou, în centru, $\Phi=\Phi_0$. Condiţia la limită cere ca fluxul la marginea reactorului, $r=r_1$, să tindă la zero. Aceasta înseamnă că

$$B=\pi/r_1 \tag{2.130}$$

şi

$$\Phi=\Phi_0 r_1 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{r_1} r}{\pi r} \text{ ;} \tag{2.131}$$

Factorul geometric B depinde din nou de dimensiunea reactorului şi, datorită naturii speciale a ecuaţiei (2.130), de forma reactorului.

Reactorul cilindric

A rămas să discutăm reactorul de formă cilindrică, al treilea ca tip şi, din punct de vedere tehnic, cel mai important.

Conform ecuaţiei (2.31), operatorul ∇^2 are aici forma $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial r^2 + 2/r(\partial/\partial r) + \partial^2/\partial z^2$, unde r şi z sînt coordonatele cilindrice. Deoarece, acum apar 2 variabile r şi z, independente, o soluţie separabilă a ecuaţiei de difuzie

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -B^2\Phi \tag{2.132}$$

îi este aplicabilă:

$$\Phi = R(r) \cdot Z(z).$$

Înlocuind această soluţie în ecuaţia (2.132) se obţine

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{Rr}\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - B^2$$

Din nou, în partea stîngă există o funcţie numai de r şi în dreapta o funcţie numai de z, aşa că pot fi egalate amîndouă cu o constantă, să zicem $-C^2$. Astfel, obţinem două ecuaţii diferite

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + C^2R = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + (B^2 - C^2)Z = 0. \tag{2.133}$$

Scanned with OKEN Scanner

A doua ecuație din (2.133) poate fi rezolvată imediat

$$Z(z)=Z_0\cos(B^2-C^2)^{1/2}z \tag{2.134}$$

unde din nou am ales soluția care este simetrică față de centrul reactorului, considerat a fi punctul $z=0$. Dacă fluxul tinde la zero, la nivelul peretelui circular al reactorului cilindric și luăm acești pereți în punctele $+z_1/2$ și $-z_2/2$, atunci rezultă din ecuația (2.134) că

$$(B^2-C^2)^{1/2}=\pi/z_1. \tag{2.135}$$

Deducem constanta C^2 din prima ecuație din (2.133). Soluția este

$$R(r)=J_0(Cr). \tag{2.136}$$

$J_0(Cr)$ este funcția Bessel de ordinul zero. Acum sîntem interesați numai în regiunea cuprinsă între $r=0$ și primul zero al funcției. Primul zero este la valoarea $Cr=2{,}405$. Dacă r_1 este raza reactorului cilindric, atunci ca fluxul de neutroni să tindă la zero pentru $r=r_1$, constanta C trebuie aleasă astfel ca la $r=r_1$, $Cr_1=2{,}405$, adică

$$C=\frac{2{,}405}{r_1}. \tag{2.137}$$

Deci, constanta C_1 și din ecuația (2.135) factorul B sînt determinați de dimensiunile reactorului. Astfel

$$B^2=\left(\frac{\pi}{z_1}\right)^2+\left(\frac{2{,}405}{r_1}\right)^2 \tag{2.138}$$

și

$$\Phi=\Phi_0 J_0\left(\frac{2{,}405}{r_1}r\right)\cos\left(\frac{\pi}{z_1}z\right). \tag{2.139}$$

Reactorii cilindrici sînt adesea construiți astfel ca înălțimea lor z_1, să fie egală cu diametrul $2r_1$. În acest caz particular,

$$B^2=\frac{1}{r_1^2}\left[\frac{\pi^2}{4}+2{,}405^2\right]=\frac{8{,}25}{r_1^2}. \tag{2.138 a}$$

Un cilindru a cărui înălțime este egală cu diametrul este numit *„cilindru cubic"*. Adesea se evită calculul unui reactor de această formă, deoarece așa cum vom vedea imediat, cilindrul cubic nu este cel mai favorabil din punct de vedere al economiei de neutroni; dacă ne reamintim că B^2 este o măsură a scurgerii de neutroni, atunci, deoarece conform

Scanned with OKEN Scanner

ecuației (2.138) B^2 este o funcție de înălțimea z_1 și de raza r_1, putem calcula care trebuie să fie raportul între înălțime și diametru la un reactor de volum dat $V=\pi r_1^2 z_1$, pentru ca scurgerea, respectiv B^2 să fie minime. În ecuația (2.138) atunci înlocuim r_1 prin V, care este menținut constant și obținem

$$B^2=\frac{\pi^2}{z_1^2}+\frac{2{,}405^2}{V}\cdot\pi z_1.$$

Pentru a afla minimul scurgerii, diferențiem (2.140) în raport cu z_1 și egalăm cu zero

$$\frac{dB^2}{dz_1}=-\frac{2\pi^2}{z_1^3}+\frac{2{,}405^2}{V}\pi=0.$$

Din aceasta se obține, după înlocuirea lui $V=\pi r_1^2 z_1$,

$$\frac{z_1}{2r_1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}\cdot 2{,}405}=0{,}924 \qquad (2.141)$$

care reprezintă raportul optim dintre înălțimea și diametrul unui reactor. Comparativ cu cilindrul cubic, reactorul cilindric optim este ceva mai turtit. Diferența de scurgere a neutronilor este totusi foarte mică.

Condiția de criticitate

Avînd explicat factorul geometric, revenim pe scurt la condiția de criticitate pentru un reactor, în regim de echilibru, din ecuația (2.118). Se vede că

$$k_{ef}=\frac{k_\infty \exp(-B^2\tau)}{1+L^2B^2} \qquad (2.142)$$

Factorul de multiplicare infinit k_∞ este o constantă care depinde de materialele din interiorul reactorului, respectiv de combustibil, moderator, produsele de fisiune, agentul de răcire și în unele cazuri este independent de dimensiunile reactorului. Lungimea de difuzie L și vîrsta Fermi τ depind de aceiași factori. Cantitățile $\exp(-B^2\tau)$ și L^2B^2 sînt esențial dependente de dimensiunile reactorului. Factorul geometric, așa cum putem vedea din ecuațiile (2.127), (2.130) și (2.138), este întotdeauna aproximativ invers proporțional cu diametrul reactorului. Astfel, afirmația pe care am făcut-o de cîteva ori că scurgerea relativă de neutroni este cu atît mai mare cu cît el este mai mic, este confirmată pentru toți cei trei reactori descriși.

Dacă factorul de multiplicare infinit k_∞ este dat, atunci condiția de criticitate (ecuația 2.142)) ne impune un anumit volum al reactorului; dacă k_∞, L^2 și τ sînt fixați, atunci B^2, și deci volumul reactorului, este dat de ecuația (2.142), presupunînd, desigur, că ne-am ales mai înainte forma pe care dorim s-o dăm reactorului.

Scanned with OKEN Scanner

10. Dimensiunile critice ale unui reactor omogen

Pentru a ne face o idee asupra mărimilor ce apar în ecuaţia (2.142) să calculăm dimensiunile critice ale unui reactor omogen.

Prima etapă este stabilirea factorului de multiplicare infinit, k_∞.

Deoarece calculul se face pentru un reactor omogen, k_∞ constă numai din trei factori: $k_\infty = p \cdot f \cdot \eta$; ε în acest caz este egal cu unitatea.

Conform ecuaţiei (2.108), factorul p pentru un reactor omogen este

$$p = \exp\left(-\frac{N_u}{\zeta \Sigma_s}\int (\sigma_{au})_{ef} dE/E\right). \tag{2.143}$$

Aici N_u este numărul de atomi de uraniu pe cm^3 ce capturează neutroni în regiunea de rezonanţă. Combustibilul este un amestec de U^{235} şi U^{238}, în raportul de 1 : 50. Să notăm acum numărul de atomi de U^{235} pe cm^3 cu N_{25} şi numărul de atomi de U^{238} cu N_{28}. Această notaţie prin intermediul indicilor 25 şi 28 este în mod obişnuit folosită. În ea, 2 înseamnă uraniu, iar 5 sau 8 arată ultima cifră a numărului de masă a atomului în discuţie. Astfel, raportul de amestec sau cum se spune mai frecvent îmbogăţirea în U^{235} este

$$\chi_{25} = N/N_{28} = 0{,}02. \tag{2.144}$$

În al doilea rînd trebuie să stabilim cîte nuclee de moderator folosim per atom de U^{238} şi ce moderator ne propunem să folosim în fiecare caz. Să alegem grafitul ca moderator şi să luăm un raport de amestec pentru moderator şi uraniu-238 pe cm^3 de

$$m = N_m/N_{28} = 400. \tag{2.145}$$

Acest indice m nu se va referi întotdeauna la moderator.

Pentru a calcula factorul p ne trebuie logaritmul mediu al pierderii de energie ξ, pe ciocnire, pe care trebuie să-l mediem conform ecuaţiei (2.49)

$$\overline{\xi} = \frac{N_m\sigma_{sm}\xi_m + N_{28}\sigma_{s28}\xi_{28} + N_{25}\sigma_{s25}\xi_{25}}{N_m\sigma_{sm} + N_{28}\sigma_{s28} + N_{25}\sigma_{s25}}$$

în care prin σ_s s-a notat secţiunea eficace de împrăştiere macroscopică. Deoarece datorită masei mari a atomilor de uraniu, ξ_{28} şi ξ_{25} sînt mult mai mici decît ξ_m pentru moderator şi, de asemenea, $N_{28}\sigma_{28}$ şi $N_{25}\sigma_{25}$ sînt mai mici decît $N_m\sigma_m$, putem considera cu o bună aproximaţie că $\overline{\xi} = \overline{\xi}_m$. Din tabelul 2.3 rezultă că

$$\xi_m = 0{,}158. \tag{2.146}$$

Scanned with OKEN Scanner

În figura 2.11 integrala efectivă de rezonanţă este reprezentată ca funcţie de secţiunea eficace de împrăştiere pe atom de uraniu.

Acum, pentru a calcula factorul p ne trebuie numai secţiunea eficace de împrăştiere microscopică. De fapt ar trebui să luăm în

Tabelul 2.3

Secţiunile eficace pentru unele elemente şi valorile α, η şi ν

Elementul	σ_a	σ_{sp}	σ_f	σ_s	α	η	ν
$^{1}_{1}H$	0,33 b*			38 b			
$^{2}_{1}H$	0,46 mb			7 b			
$^{12}_{6}C$	4 mb			4,8 b			
$^{16}_{8}O$				4,2 b			
$^{232}_{90}Th$	7,6 b		7,3 b				
$^{230}_{92}U$	581 b	527 b	54 b		0,102	2,20	2,51
$^{235}_{92}U$	680 b	576 b	104		0,19	2,07	2,74
$^{238}_{92}U$	2,8 b		2,7 b				

* b=barn, mb=milibarn=1/1 000 barn.

consideraţie atît împrăştierea produsă de atomii de moderator cît şi de atomii de uraniu. Deci Σ_s ar trebui să fie egalată cu $N_{28}\sigma_{s28}+N_{25}\sigma_{s25}+$ $+N_m\sigma_{sm}$, dar deoarece ultimul termen este preponderent faţă de ceilalţi doi, punem $\Sigma_s=N_m\sigma_{sm}$. Din tabelul 2.3 găsim secţiunea de împrăştiere

$$\sigma_{sm}=4{,}8 \text{ barn} \tag{2.147}$$

deci

$$\frac{\Sigma_s}{N_{28}}=\sigma_{sm}\frac{N_m}{N_{28}}=1\,920, \tag{2.148}$$

Acum,

$$\int_{E_{th}}^{E_f}(\sigma_{au})_{ef}\,dE/E=100$$

corespunzător valorii din fig. 2.11. În consecinţă, valoarea lui p este

$$p=\exp(-100/0{,}158\cdot 1\,920)=\exp(-0{,}33)=0{,}719. \qquad (2.149)$$

Factorul η este mărimea următoare ce trebuie calculată. Conform ecuaţiei (2.111), factorul η este produsul numărului mediu de neutroni eliberaţi la fisiune, ν, înmulţit cu probabilitatea ca un neutron care este absorbit în combustibil să producă fisiunea uraniului-235. Atunci

$$\eta=\nu\,\frac{\sigma_{f25}}{\sigma_{f25}+\sigma_{\gamma 25}+(1/\chi)\sigma_{28}};$$

σ_{f25} este secţiunea eficace de fisiune a U^{235} pentru neutronii termic şi $\sigma_{\gamma 25}$ secţiunea de absorbţie a neutronilor termici în U^{235} care nu produce fisiune. χ este factorul de îmbogăţire dat de ecuaţia (2.144) şi σ_{28} secţiunea de absorbţie a neutronilor termici în U^{238}. Din tabelul 2.3 se iau valorile: $\nu=2{,}47$; $\sigma_{f25}=576$ barni; $\sigma_{\gamma 25}=\sigma_{a25}-\sigma_{f25}=104$ barni; $\sigma_{28}=2{,}8$ barni. Atunci,

$$\eta=2{,}47\,\frac{576}{576+104+50\cdot 2{,}8}=1{,}735. \qquad (2.150)$$

Să calculăm acum al treilea factor component al factorului de multiplicare k_∞, factorul f. Factorul f dă probabilitatea ca un neutron termic să fie absorbit în combustibil şi nu în moderator. Conform ecuaţiei (2.109),

$$f=\frac{N_{25}\sigma_{25}+N_{28}\sigma_{28}}{N_{25}\sigma_{25}+N_{28}\sigma_{28}+N_m\sigma_m}=\frac{\chi\sigma_{25}+\sigma_{28}}{\chi\sigma_{25}+\sigma_{28}+m\sigma_m} \qquad (2.151)$$

unde mărimile σ sînt secţiunile eficace de absorbţie pentru neutronii termici. Ele pot fi de asemenea luate din tabelul 2.3.

De fapt, secţiunea eficace de absorbţie a grafitului este cu cîteva ordine de mărime mai mică decît a uraniului, dar cu toate acestea ea este importantă deoarece în reactor sînt conţinuţi mult mai mulţi atomi de moderator decît de uraniu.

Cu valorile date, factorul f devine

$$f=\frac{0{,}02\times 680+2{,}8}{0{,}02\times 680+2{,}8+400\times 4\times 10^{-3}}=0{,}911. \qquad (2.152)$$

Factorul de multiplicare pentru reactorul omogen, infinit, poate fi calculat din cei trei factori p, η, f

$$k_\infty=0{,}719\times 1{,}735\times 0{,}911=1{,}12. \qquad (2.153)$$

Atunci 0,12 neutroni per neutron absorbit pot fi pierduţi prin scurgere ca neutron rapid sau lent, dacă reactorul este critic, adică funcţionează în regim staţionar şi sîntem în măsură acum să calculăm dimensiunile

Scanned with OKEN Scanner

reactorului pentru care fracţiunea de neutroni ce se scurge în raport cu cei absorbiţi în interiorul reactorului, este exact 0,12.

Pentru aceasta, trebuie întîi să calculăm lungimea de difuzie L^2 şi factorul geometric B^2.

Lungimea de difuzie este $L^2=D/\Sigma_a$, unde Σ_a este secţiunea de absorbţie macroscopică în reactor, adică în uraniu şi moderator, iar D este constanta de difuzie a amestecului uraniu-moderator, pe care o putem egala cu constanta de difuzie a moderatorului. Atunci

$$L^2=\frac{D}{N_{25}\sigma_{25}+N_{28}\sigma_{28}+N_m\sigma_m}=\frac{D}{N_m\sigma_m}\cdot\frac{N_m\sigma_m}{N_{25}\sigma_{25}+N_{28}\sigma_{28}+N_m\sigma_m}; \quad (2.154)$$

Primul factor $D/N_m\sigma_m=D/\Sigma_m$ este lungimea de difuzie în moderatorul pur, fără uraniu — mărime ce o putem lua, de asemenea, din tabelul 2.2. Al doilea factor din ecuaţia (2.154) este, aşa cum se poate vedea din ecuaţia (2.151), egal cu $1-f$. Astfel, obţinem pentru lungimea de difuzie în amestecul combustibil-moderator, următoarea relaţie

$$L^2=L_m^2(1-f) \quad (2.155)$$

unde L_m este lungimea de difuzie în moderatorul pur. Conform tabelului 2.2, pentru grafit $L_m=50$ cm. Atunci,

$$L^2=2\,500\times0{,}089=222\ \text{cm}^2. \quad (2.156)$$

Vîrsta Fermi τ în amestecul combustibil-moderator este, în cazul unei concentraţii mici de combustibil, egală cu aceea în moderatorul pur. Din tabelul 2.2 rezultă că

$$\tau=350\ \text{cm}^2.$$

Astfel am dedus toate constantele cerute pentru calculul factorului geometric B^2 din ecuaţia (2.142) şi deci pentru calculul dimensiunilor reactorului.

Să evaluăm în continuare mărimea lui B^2, considerînd factorul de scurgere a neutronilor rapizi, $\exp(-B^2\tau)$, egal cu unitatea. Atunci, conform ecuaţiei (2.142) obţinem, într-o primă aproximaţie,

$$B^2\approx\frac{1}{L^2}(k_\infty-1)=\frac{0{,}12}{222}=0{,}54\cdot10^{-3}.$$

Vedem din aceasta că exponentul $B^2\tau$ este de ordinul 1/10 şi că se justifică folosirea formulei aproximative pentru condiţia de criticitate, adică (2.119). În consecinţă, obţinem

$$B^2=\frac{k_\infty-1}{M^2}=\frac{0{,}12}{222+350}=0{,}21\cdot10^{-3}. \quad (2.157)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă dorim să calculăm factorul B mai exact, conform ecuației (2.142), este mai simplu să se folosească o metodă grafică, scriind ecuația de criticitate (2.142) sub forma

$$\exp(-B^2\tau) = \frac{1}{k_\infty} + \frac{L^2}{k_\infty \tau} B^2\tau. \qquad (2.158)$$

Partea stîngă a ecuației (2.158) se reprezintă grafic ca funcție de $B^2\tau$, și de asemenea partea dreaptă care este o linie dreaptă. Punctul de intersecție al acestor două curbe dă valoarea lui $B^2\tau$, care satisface condiția critică.

Să considerăm valoarea calculată în ecuația (2.157). Pentru a stabili dimensiunea reactorului trebuie să știm ce formă are. Să alegem forma de cilindru cubic. Conform ecuației (2.138 a)

$$r_1 = \sqrt{\frac{8{,}25}{0{,}21 \times 10^{-3}}}\,\text{cm} = 1{,}98 \text{ m}.$$

Diametrul și înălțimea reactorului sînt deci aproximativ 4 m.

Trebuie precizat că toate formulele folosite în acest ultim paragraf pot să dea numai valori aproximative, deoarece condițiile din reactor au fost considerabil idealizate. De exemplu, influența neuniformităților de temperatură din zona activă a reactorului asupra producției de neutroni nu a fost luată în considerație. De asemenea, nu a fost făcută nici o precizare asupra distorsiunilor fluxului de neutroni Φ, datorate barelor de control și altor materiale structurale din zona activă. Materialul din jurul zonei active (de exemplu, reflectorul) nu a fost luat în considerație. Astfel de perturbații ale comportării unui reactor, idealizate pînă acum, vor fi discutate în capitolele următoare.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

NEOMOGENITĂȚI ÎN ZONA ACTIVĂ A REACTORULUI

Pînă aici s-a presupus că proprietățile fizice ale materialelor sînt aceleași în fiecare punct din interiorul reactorului. Aceasta diferă de realitate chiar și în cazul reactorului omogen. De exemplu, variația cu temperatura de la un punct la altul în interiorul reactorului conduce la neomogenități. În plus, în unele regiuni ale reactorului pot exista așa numitele otrăvuri. Otrăvurile, de obicei produse de fisiune, sînt substanțe care capturează neutronii și îi absorb fără folos. Combustibilul în zona activă nu va „arde" uniform, fiind, în general, consumat mai rapid în centru decît la periferie, datorită fluxului de neutroni mai mare în centrul zonei. În consecință, după un anumit timp producția de noi neutroni de fisiune scade în centrul zonei active și curba fluxului de neutroni se aplatizează puțin în această regiune. Toate aceste efecte produc neuniformități ale reactivității în zona activă. În paragraful următor ne propunem să tratăm efectul unor astfel de neuniformități asupra reactivității totale a reactorului.

1. Variații spațiale ale factorului geometric al reactorului

În paragraful 2.10 am discutat despre factorul geometric B, pe de o parte ca proprietate a materialelor conținute în zona activă, iar pe de altă parte ca factor geometric al volumului zonei active. Dacă „geometria" ca proprietate de material (vezi definiția din ecuația (2.116)) este constantă pentru întreaga zonă activă a reactorului, atunci în formulele (2.127), (2.130) și (2.140) ea este legată direct de dimensiunile zonei active a reactorului.

Vom deosebi în cele ce urmează „factorul geometric" și „factorul de material". Presupunînd reactorul critic, factorul geometric depinde de geometria reactorului, respectiv de dimensiunile lui. Această condiție

cere ca proprietăţile fizice ale materialului din zona activă să satisfacă ecuaţia (2.118). În consecinţă, factorul geometric poate fi privit şi ca o proprietate de material, definind un „factor de material". Dacă zona activă este complet omogenă, atunci factorul geometric este identic cu factorul de material. Dacă, însă, zona activă este alcătuită din cîteva sorturi de materiale diferite, astfel încît producţia de neutroni în partea de jos să fie mai mare decît în partea de sus, atunci nu are sens să se dea un factor geometric pentru fiecare parte, ci, conform ecuaţiei (2.118), există un factor de material pentru fiecare parte. Aşa cum se va arăta în continuare, din acest factor de material se poate determina factorul geometric pentru întregul reactor.

Să considerăm cazul în care factorul geometric ia valori diferite în zona activă a reactorului, astfel încît într-un volum V_1 al zonei active el este constant şi egal cu B_1, în altă parte V_2 el este egal cu B_2 ş.a.m.d. Să împărţim întreg volumul V al zonei active în n părţi de volume V_1, $V_2, \ldots, V_n$ cu valori constante ale factorului de material $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Mai mult, ne vom întîlni numai cu cazul stării de echilibru, astfel încît în fiecare element de volum V_ν se aplică ecuaţia de difuzie

$$\nabla^2\Phi' + B_\nu^2\Phi' = 0. \tag{3.1}$$

Aici Φ' este fluxul de neutroni în zona activă a reactorului care ţine seama de valorile diferite ale factorului B. Astfel, în comparaţie cu distribuţia normală a fluxului dedusă din ecuaţiile (2.125), (2.129) şi (2.139) pentru cazul unui reactor cu acelaşi B^2 în orice punct Φ' este în general întrucîtva o distribuţie de flux distorsionată.

Distribuţia normală Φ este dată de ecuaţia de difuzie

$$\nabla^2\Phi + B^2\Phi = 0. \tag{3.2}$$

Aici B^2 este factorul geometric din zona activă a reactorului. Ne trebuie o valoare medie a n factori de material din ecuaţia (3.1). Φ nu este fluxul ce apare în mod normal, ci fluxul care ar apare dacă factorul B mediu ar fi acelaşi în toată zona activă.

Pentru a obţine o regulă de mediere a lui B_ν^2, ne amintim de o teoremă din calculul integral. Este un caz particular al teoremei lui Green:

Dacă considerăm integrala extinsă la întregul volum al zonei active

$$\int_V (\Phi'\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Phi')\,dV \tag{3.3}$$

presupunînd că atît fluxul normal Φ cît şi fluxul perturbat Φ' tind la zero la marginea reactorului, ceea ce desigur trebuie să fie realizat la un reactor, atunci însăşi integrala tinde la zero, deoarece dacă scriem operatorul ∇^2 din ecuaţia (3.3) pentru cazul coordonatelor carteziene şi alegem în fiecare caz una din variabilele x, y sau z, integrăm parţial în raport

Scanned with OKEN Scanner

cu ea și introducem condiția la limită, atunci constatăm că contribuția integrării asupra acestor variabile este egală cu zero. Același lucru rezultă și cu celelalte două variabile și de asemenea în cazul utilizării altui sistem de coordonate. Teorema se aplică deci independent de alegerea sistemului de coordonate și de natura funcțiilor Φ și Φ', punînd condiția ca aceste două funcții să tindă către zero la o margine comună și ca ele să aibă sens fizic

$$\int_V (\Phi' \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Phi') dV = 0. \tag{3.4}$$

Acum introducem ecuațiile (3.1) și (3.2) în (3.4). Atunci

$$-\int_V \Phi' B^2 \Phi dV + \int_{V_1} \Phi B_1^2 \Phi' dV + \int_{V_2} \Phi B_2^2 \Phi' dV \ldots$$

$$+ \int_{V_n} \Phi B_n^2 \Phi' dV = 0. \tag{3.5}$$

Putem scoate factorii constanți B în afara integralelor și obținem

$$B^2 \int_V \Phi' \Phi dV = B_1^2 \int_{V_0} \Phi' \Phi dV + B_2^2 \int_{V_2} \Phi' \Phi dV \ldots \tag{3.6}$$

Dacă facem aproximația că $\Phi = \Phi'$, obținem formula valorii medii a factorului de material, pe care o căutam

$$B^2 = \frac{1}{\int_V \Phi^2 dV} \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^2 \int_{V_\nu} \Phi^2 dV = \sum_{\nu=1}^{n} W_\nu B_\nu^2. \tag{3.7}$$

Astfel pătratul factorului de material este mediat cu ajutorul pătratului fluxului. Denumirea de „pondere statistică“ a fost adoptată pentru factorul

$$W_\nu = \frac{\int_{V_\nu} \Phi^2 dV}{\int_V \Phi^2 dV} \tag{3.8}$$

deși întreaga problemă nu are nimic comun cu statistica. Numim mărimile W_ν din ecuația (3.8) „factori de pondere“, deoarece ei dau ponderea factorilor individuali B_ν în diferite regiuni din reactor. De exemplu, factorul de material în centrul zonei active, unde fluxul este maxim, va afecta cel mai mult factorul mediu de material.

Pentru a fi în măsură să aplicăm ecuația (3.7), trebuie să calculăm factorul de pondere a regiunilor individuale din reactor conform ecuației

Scanned with OKEN Scanner

(3.8). Fig. 3.1 arată valorile lui W_v cînd zona activă este împărțită în două regiuni, una interioară și alta exterioară, pentru cîteva forme de zone. În cazul sferei, de exemplu, aceste două regiuni sînt concentrice; în cazul unui cilindru ele sînt simetrice față de axa cilindrului. Raza regiunii interioare este notată cu r, iar a întregului reactor cu r_1. În ordonată sînt reprezentate valorile factorului de pondere, iar pe abscisă raportul r/r_1. Reactorul poate fi împărțit la fel de bine în alte părți. De exemplu, într-un reactor răcit cu gaz, unde diferența de temperatură între regiunea superioară și cea inferioară produce o variație a factorului de material în direcția axei cilindrice, se poate împărți zona activă a reactorului printr-un plan orizontal; sau dacă se dorește estimarea efectului de ardere mai intensă a combustibilului în mijlocul zonei active, atunci se poate împărți zona activă într-o regiune sferică sau cilindrică centrală și una exterioară (înconjurătoare). Pentru fiecare caz, factorul de pondere trebuie să fie calculat, deși aceasta se poate face numai aproximativ.

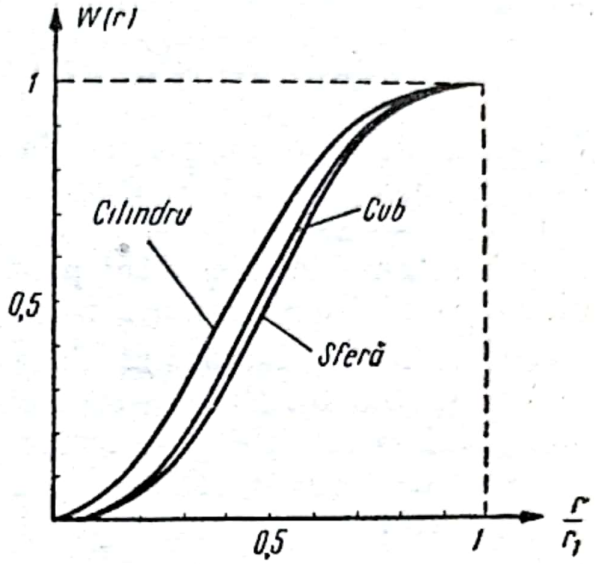


Fig. 3.1. Factorii de pondere în funcție de raportul razelor. Curba de sus se referă la un cilindru infinit lung, curba din mijloc la un cub, și curba de jos la sferă.

Din ecuația (3.7) se vede că efectele consumului de combustibil, otrăvirii, temperaturii ș.a.m.d., nu se pot lua în considerație simplu, ci numai prin medierea secțiunii eficace de absorbție, temperaturii sau altor mărimi caracteristice de volum, utilizîndu-se aceste medieri pentru a calcula efectul asupra factorului B^2, dar trebuie să fie aplicate ponderile spațiale corespunzătoare pentru toate efectele de acest tip pentru a obține valoarea medie corectă a factorului B.

Uneori, este practic să se transforme variația factorului de material B_v într-o variație corespunzătoare a factorului geometric B și apoi aceasta într-o variație a factorului efectiv de multiplicare k_{ef}

$$dB^2 = \frac{\int_{V_v} \Phi^2 dV}{\int_V \Phi^2 dV} dB_v^2 = W_v dB_v^2 \qquad (3.8\ a)$$

și deoarece, conform ecuației (2.19),

$$dk_{ef} \approx \frac{-k_\infty M^2}{(1+B^2M^2)^2}\, dB^2 = -k_{ef} \cdot \frac{M^2}{1+B^2M^2}\, dB^2$$

avem

$$dk_{ef} = -k_{ef} \frac{M^2}{1+B^2M^2} W_v\, dB_v^2. \qquad (3.8\ b)$$

Un astfel de procedeu nu este în întregime corect, deoarece mărimea B, care depinde numai de geometria reactorului, nu se poate modifica, Prin dB^2 — sau dk_{ef} — se înțelege o schimbare aparentă ce trebuie făcută într-un fel sau altul pentru a ține reactorul critic deși de fapt nu apare nici o schimbare a lui k_{ef}.

Semnificația factorului de pondere W_v apare clar din ecuațiile (3.8 a) și (3.8 b). Ele arată că efectul factorului de material B_v asupra factorului geometric și a factorului de multiplicare este puternic dependent de locul și regiunea din zona activă a reactorului în care B_v se modifică.

2. Efectul de temperatură

În paragraful precedent s-a discutat efectul factorului de material în diferite regiuni ale zonei active; acum ne propunem să discutăm efectul temperaturii materialului din reactor asupra factorului de material. Deoarece temperatura se poate schimba considerabil de la o regiune la alta, nu ne propunem ca în cazul general să găsim, pentru o schimbare a temperaturii medii în reactor, care este schimbarea corespunzătoare de activitate a reactorului, ci numai să stabilim influența temperaturii asupra factorului de material, care depinde de poziție. Variația totală a factorului de material și deci variația totală a reactivității poate fi calculată apoi cu ajutorul ecuației (3.8 b), respectiv se calculează cu ajutorul ecuației (3.7) în ce măsură trebuie modificat factorul de material într-un domeniu al zonei active (de exemplu cu ajutorul barelor de control), dacă el s-a schimbat într-un alt loc sub influența temperaturii, cu condiția ca factorul de material mediu să rămînă constant, adică reactorul să rămînă critic.

Efectele de temperatură asupra factorului de material pot fi împărțite în două categorii: cele ce se referă direct la reacțiile nucleare cu neutroni și cele ce se referă la difuzia neutronilor.

Cel mai important din prima categorie este schimbarea secțiunii de absorbție cu temperatura.

Scanned with OKEN Scanner

S-a arătat la început că secțiunea de absorbție a nucleelor față de neutronii termici este aproximativ invers proporțională cu viteza neutronului (legea $1/v$). Viteza medie a neutronilor este proporțională cu rădăcina pătrată a energiei cinetice medii, care este la rîndul ei proporțională cu temperatura absolută, deoarece neutronii sînt în echilibru termic cu materialele din zona activă. Secțiunea eficace de absorbție a nucleelor este deci invers proporțională cu rădăcina pătrată a temperaturii materialelor din zona activă, în principal temperatura moderatorului, deoarece majoritatea ciocnirilor neutronilor se fac cu nucleele de moderator și, mai mult, transferul de energie de la nucleele ușoare de moderator la neutroni este mult mai mare decît acela de la nucleele grele de combustibil. Temperatura neutronilor este deci în esență aceea a moderatorului.

Dacă secțiunea eficace microscopică de absorbție este σ_{a0} la temperatura normală, atunci la o temperatură T

$$\sigma_a = \sigma_{a0}(T_0/T)^{1/2}. \tag{3.9}$$

Această ecuație este valabilă pentru toți atomii ce absorb neutronii termici în reactor.

Secțiunea eficace de împrăștiere depinde de asemenea de temperatură, dar nu atît de mult. Vom neglija în consecință acest efect de temperatură.

Al doilea efect de temperatură, privind reacțiile nucleare propriu-zise, implică integrala de rezonanță și contribuția sa la factorul p. Acest efect apare datorită faptului că în timpul capturii de rezonanță nucleele atomice sînt în permanentă mișcare termică, iar efectul se referă la viteza relativă a nucleelor și neutronilor care participă la captura de rezonanță. Mișcarea nucleelor, ca și cea a neutronilor, este deci statistică, așa că vitezele neutronului și a nucleului se pot aduna sau scădea conform legilor statistice. Consecința acestui fapt este lărgirea picurilor de rezonanță și deci o creștere a probabilității de captură. Astfel, factorul p crește cu temperatura.

Efectele de temperatură referitoare la difuzia neutronilor influențează lungimea de difuzie L, vîrsta Fermi τ și deci lungimea de migrație M și, în final, dimensiunile zonei active sau factorul geometric B.

Lungimea de difuzie este definită ca

$$L^2 = D/\Sigma_a = 1/3\,\Sigma_{tr}\Sigma_a. \tag{3.10}$$

Aici Σ_a este secțiunea de absorbție macroscopică termică și Σ_{tr} secțiunea de transport macroscopică, corespunzătoare drumului liber mediu de transport λ_{tr} care a fost introdus prin ecuația (2.103). Să scriem Σ_a și Σ_{tr} sub forma $\Sigma_a = N_a\sigma_a$; $\Sigma_{tr} = N_{tr}\sigma_{tr}$. N_a este numărul de atomi absorbanți și N_{tr} numărul de atomi difuzanți pe cm^3. Aceste numere, N_a

Scanned with OKEN Scanner

și N_{tr} sînt proporționale cu densitatea și aceasta depinde de temperatură prin intermediul coeficientului de dilatare termică α

$$\rho=\rho_0/[1+\alpha(T-T_0)]^3. \tag{3.11}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (3.9) și (3.11) obținem pentru lungimea de difuzie

$$L^2=L_0^2\frac{p_0^2}{p^2}\left[\frac{T}{T_0}\right]^{\frac{1}{2}}=L_0^2[1+\alpha(T-T_0)]^6\left[\frac{T}{T_0}\right]^{\frac{1}{2}}\approx$$

$$\approx L_0^2[1+6\alpha(T-T_0)]\left[\frac{T}{T_0}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.12}$$

în care indicele 0 se referă la starea de temperatură normală T_0. Astfel, lungimea de difuzie crește cu temperatura.

Ca și lungimea de difuzie, vîrsta Fermi τ se modifică de asemenea cu temperatura.

Conform ecuației (2.78), vîrsta Fermi este dată de expresia

$$\tau_{th}=\int_{E_{th}}^{E_f}\frac{D(E)}{\xi\Sigma_s(E)E}\,dE. \tag{3.13}$$

Vom înlocui D cu $1/3\Sigma_{tr}$, Σ_{tr} cu $N_{tr}\sigma_{tr}$ și Σ_s cu $N_{tr}\sigma_s$. Atunci, vîrsta Fermi devine

$$\tau=\int_{E_{th}}^{E_f}\frac{1}{3\xi\sigma_{tr}\sigma_s N_{tr}^2}\,\frac{dE}{E}. \tag{3.14}$$

Deoarece secțiunile eficace $\sigma_{tr}(E)$ și $\sigma_s(E)$ se referă la regiunea de încetinire, care este deasupra energiei termice, σ_{tr} și σ_s sînt independente de temperatură (ele fiind și așa apnoape independente de temperatură). ξ și E_f sînt de asemenea independente de temperatură. Numai N_{tr}^2 și E_{th} sînt dependente de temperatură. Diferențiala lui τ devine

$$d\tau=\frac{-1}{3\xi\sigma_{tr}\sigma_s N_{tr}^2(E_{th})}\,\frac{dE}{E_{th}}+\int_{E_{th}}^{E_f}\frac{1}{3\xi\sigma_{tr}\sigma_s}\,d\left(\frac{1}{N_{tr}^2}\right)\frac{dE}{E}. \tag{3.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Numărul N_{tr} nu depinde de energia E a neutronilor, ci de densitate şi deci de temperatură. Putem scoate, în acest caz, diferenţiala $d(1/N_{tr}^2)$ în afara integralei şi obţinem

$$d\tau = \frac{-1}{3\xi\Sigma_s\Sigma_{tr}} \frac{dE}{E_{th}} - 2\frac{dN_{tr}}{N_{tr}} \int_{E_{th}}^{E_f} \frac{1}{3\xi\Sigma_{tr}\Sigma_s} \frac{dE}{E}$$

$$d\tau = \frac{-1}{3\xi\Sigma_s\Sigma_{tr}} d(\ln E_{th}) - 2\tau \frac{dN_{tr}}{N_{tr}}. \qquad (3.16)$$

Deoarece energia termică este proporţională cu temperatura şi numărul de atomi difuzanţi N_{tr} cu densitatea, ecuaţia (3.16) devine

$$d\tau = \tau - \tau_0 = \frac{1}{3\xi\Sigma_s\Sigma_{tr}} \ln\left(\frac{T_0}{T}\right) - 2\tau \frac{d\rho}{\rho_0}$$

şi din aceasta şi ecuaţia (3.11)

$$\tau = \tau_0 + \frac{1}{3\xi\Sigma_s\Sigma_{tr}} \ln\left(\frac{T_0}{T}\right) + \tau_0 \frac{6\alpha(T-T_0)}{[1+\alpha(T-T_0)]^4}. \qquad (3.17)$$

Am discutat influenţa temperaturii asupra factorului de material în diferite regiuni ale zonei active. Etapa următoare constă în introducerea factorului B_v în ecuaţia (3.7), astfel încît la un volum dat al reactorului şi la temperatura T_0, ecuaţia (3.7) să fie verificată. Apoi se introduce B_v care a fost corectat cu efectul temperaturii. În general, ecuaţia (3.7) nu va fi satisfăcută întrutotul, deoarece factorul geometric a rămas acelaşi, din cauza geometriei neschimbate a reactorului. Totuşi, deoarece reactorul este critic, numai cît bilanţul de reactivitate exprimat de ecuaţia (3.7) este îndeplinit trebuie să se compenseze schimbarea lui B_v în altă regiune (sau chiar în aceeaşi regiune) prin efectul de temperatură. Aceasta se poate realiza pe cale artificială, de exemplu, prin mişcarea barelor de control.

Pentru a calcula mărimea efectelor de temperatură asupra factorului de material B_v, luăm din ecuaţia (2.119) relaţia ce leagă factorul de material de parametrii de material ai zonei active. Aceasta este

$$B_v^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + \tau}; \qquad (3.18)$$

$\exp(-B^2\tau)$ a fost aproximată prin $1 - B^2\tau$.

În expresia factorului de multiplicare k_∞, numai factorul p este esenţial dependent de temperatură; factorul ε se referă la neutronii rapizi care nu sînt influenţaţi de temperatură, iar în η şi f apar numai rapoarte ale secţiunilor de absorbţie termică, care au aceeaşi dependenţă de temperatură (conform legii $1/v$). Am discutat influenţa tempe-

Scanned with OKEN Scanner

raturii asupra lui L şi τ. Aici dăm numai o formulă care este aplicabilă pentru modificări mici de temperatură.

Diferenţiala ecuaţiei (3.18) este

$$dB_\nu^2 = \left[\frac{\partial B_\nu^2}{\partial k_\infty}\frac{dk_\infty}{dT} + \frac{\partial B_\nu^2}{\partial L^2}\frac{dL^2}{dT} + \frac{\partial B_\nu^2}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dT}\right]dT. \tag{3.19}$$

Derivatele parţiale în expresia de mai sus sînt

$$\frac{\partial B_\nu^2}{\partial k_\infty} = \frac{1}{L^2+\tau}, \quad \frac{\partial B_\nu^2}{\partial L^2} = -\frac{(k_\infty - 1)}{(L^2+\tau)^2}, \quad \frac{\partial B_\nu^2}{\partial \tau} = \frac{-(k_\infty-1)}{(L^2+\tau)^2}. \tag{3.20}$$

Deoarece în k_∞ numai p este dependent de temperatură,

$$\frac{dk_\infty}{dT} = \frac{k_\infty}{p}\frac{dp}{dT} \tag{3.21}$$

şi din ecuaţiile (3.12) şi (3.17)

$$\frac{dL^2}{dT} = L_0^2\left[6\alpha + \frac{1}{2T_0}\right], \quad \frac{d\tau}{dT} = \frac{-1}{3\xi\Sigma_s\Sigma_{tr}}\frac{1}{T_0} + 6\alpha\tau_0. \tag{3.22}$$

Prin combinarea ecuaţiilor (3.19), (3,20), (3.21) şi (3.22) obţinem variaţia factorului de material cu temperatura.

Pînă acum toate efectele de temperatură considerate se referă la materialele din zona activă. Există însă şi un alt efect de temperatură asupra factorului B, dat de dilatarea reactorului cu creşterea temperaturii. Acest efect depinde în oarecare măsură de forma zonei active. În prezent, toţi reactorii au o formă care este aproximativ cubică, pentru a obţine o scurgere minimă de neutroni. Înălţimea lor este deci aproximativ egală cu lăţimea şi putem pentru considerarea acestui efect să ne concentrăm atenţia asupra reactorului sferic.

Conform ecuaţiei (2.130), factorul geometric pentru reactorul sferic este $B=\pi/r_1$ şi deoarece raza reactorului creşte liniar cu temperatura,

$$r_1 = r_{10}[1+\alpha(T-T_0)]$$

rezultă

$$dB^2 = \frac{dB^2}{dr_1}\cdot\frac{dr_1}{dT}dT = -\frac{2\pi^2}{r_{10}^3}\alpha dT = -\frac{2\alpha}{r_{10}}B_0^2 dT. \tag{3.23}$$

Acest efect de temperatură este întodeauna pozitiv faţă de cele descrise pînă acum, deoarece el este singurul care îmbunătăţeşte economia de neutroni. În general, însă, acest efect este cel mai mic: astfel, în ansamblu, o creştere a temperaturii în interiorul reactorului totdeauna duce la o creştere a consumului de neutroni. Pentru sigu-

Scanned with OKEN Scanner

ranţa reactorului aceasta prezintă un avantaj, deoarece la creşterea temperaturii creşterea consumului de neutroni duce la oprirea reacţiei în lanţ.

Datorită dilatării zonei active, limitele de integrare în ecuaţia (3.7) se schimbă cu temperatura, la fel ca şi factorul geometric B, conform ecuaţiei (3.23). Factorii cu ponderea cea mai mare rămîn însă practic independenţi faţă de temperatură, astfel că este uşor să convertim variaţia factorului geometric total B într-o variaţie corespunzătoare a unuia dintre factorii de material B_v, conform ecuaţiei (3.8 a), de exemplu pentru B_v ce corespunde regiunii din zona activă ce conţine barele de control.

În încheiere este necesar să menţionăm efectul de temperatură ce se referă la reactorii ce conţin mult U-238 şi plutoniu. Plutoniul are un pic de rezonanţă la sfîrşitul regiunii termice şi legea $1/v$, care s-a presupus valabilă în ecuaţia (3.9) pentru întreaga zonă termică, nu se aplică. Consecinţa este că la creşterea temperaturii, adică la creşterea vitezei medii v, producţia de neutroni a plutoniului creşte. Astfel coeficientul de temperatură datorat prezenţei plutoniului într-un reactor termic este pozitiv. Cum se ia în consideraţie această comportare particulară a plutoniului, se arată în tabelele de secţiuni eficace ale materialelor.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV

REACTORUL ETEROGEN

Teoria difuziei, prezentată în capitolul precedent, s-a referit numai la reactorul omogen (combustibilul şi moderatorul amestecaţi omogen). De exemplu, deducerea factorului f s-a făcut în ipoteza că atomii de combustibil şi moderator sînt expuşi la acelaşi flux de neutroni Φ. Aceasta este adevărat numai dacă combustibilul şi moderatorul sînt uniform amestecaţi. În reactorul eterogen, zonele de combustibil şi moderator sînt separate. Fluxul de neutroni în elementul combustibil nu mai este acelaşi cu cel din moderatorul înconjurător, ci este mult mai mic, datorită faptului că absorbţia în regiunea energetică de rezonanţă şi în regiunea termică în combustibil este mult mai puternică decît în afară. Este adevărat că în combustibil se formează neutroni de fisiune, dar ei difuzează foarte repede în afară, în moderator, şi numai de aici ei pătrund din nou în combustibil, avînd spectrul energetic asemănător cu cel dedus din teoria încetinirii într-un moderator pur. Aici ei sînt absorbiţi, mai ales în regiunea de rezonanţă şi termică, aşa că pentru aceste zone energetice, fluxul de neutroni în combustibil scade aşa cum se vede în fig. 4.1. Apariţia acestui minim de flux în elementele combustibile conduce la diferenţe esenţiale între caracteristicile reactorului eterogen şi ale celui omogen.

Să considerăm acum neutronii termici. Ei se formează aproape exclusiv în regiunea moderatorului, deoarece în regiunea cu combustibil se află nuclee grele de uraniu, care nu încetinesc neutronii; secţiunea eficace de împrăştiere este de asemenea relativ mică. În consecinţă, în regiunea cu combustibil, nu se formează neutroni termici. Neutronii ce difuzează în afara zonei de moderator şi intră în elementul combustibil, sînt absorbiţi aproape de suprafaţă, datorită secţiunii eficace de absorbţie mari a uraniului, astfel că numai o mică parte a neutronilor termici ajunge în regiunea centrală. Amplitudinea fluxului de neutroni (fig. 4.1) scade deci foarte repede în zona centrală a elementului combustibil.

Deoarece cei mai mulţi neutroni termici ce pătrund în elementul combustibil sînt imediat absorbiţi la suprafaţă, zona centrală a regiunii cu combustibil contribuie relativ puţin la absorbţia totală. Absorbţia

Scanned with OKEN Scanner

totală de către nucleele de combustibil este de asemenea mai mică într-un reactor eterogen decît într-unul omogen, sau mai exact, raportul dintre numărul de neutroni termici absorbiţi în combustibil şi numărul neutronilor termici absorbiţi în moderator şi combustibil este mai mic în cazul unui reactor eterogen decît în cazul unuia omogen, presupunînd că raportul numărului de nuclee de combustibil şi moderator este acelaşi în ambii reactori.

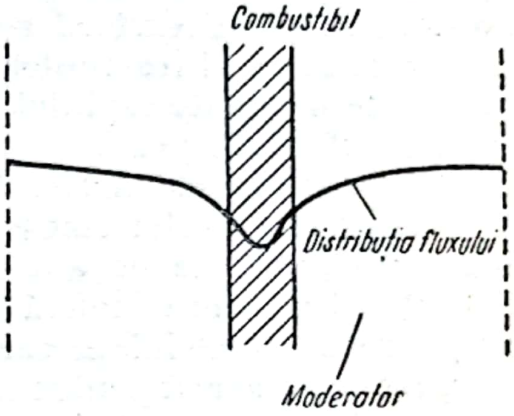


Fig. 4.1. Distribuţia fluxului de neutroni în interiorul unei celule. Liniile întrerupte arată marginile celulei. Fluxul scade în regiunea cu combustibil şi este constant la marginea celulei.

Factorul f într-un reactor eterogen este atunci mai mic decît într-unul omogen. Aceasta la prima vedere constituie un dezavantaj, deoarece este de dorit ca factorul de multiplicare k_∞ să fie mai mare posibil. Totuşi dezavantajul factorului f mic este compensat de o creştere mare a factorului p. Această creştere se poate arăta în mod asemănător cu demonstraţia făcută la micşorarea factorului f.

Comportarea factorului p este dată de picurile de rezonanţă, astfel că neutronii de rezonanţă sînt în acest caz mai importanţi decît cei termici. În plus, variaţia inversă a factorului p în reactorul eterogen faţă de cea din reactorul omogen, depinde esenţial de absorbţia neutronilor la suprafaţa elementului combustibil şi scade în interiorul acestuia. Neutronii care pătrund din moderator în elementul combustibil, dacă au energia egală cu cea a unui pic de rezonanţă, vor fi foarte probabil capturaţi la suprafaţă. Regiunea interioară a combustibilului, practic nu ia deci parte la captură. Neutronii a căror energie nu este egală cu a unui pic de rezonanţă nu vor fi capturaţi la trecerea prin combustibil, deoarece prin ciocnirile cu nucleele grele de uraniu ei nu pierd multă energie şi deci rareori ating energia picurilor, în regiunea cu combustibil. Ei traversează regiunea cu combustibil intrînd din nou în moderator şi acolo sînt încetiniţi. Astfel vedem aici din nou că neutronii ce sînt capturaţi în regiunea de rezonanţă, în general suferă această captură la suprafaţă. Datorită împrăştierii şi încetinirii în uraniu, neutronii sînt absorbiţi în mică măsură în combustibil. Absorbţia de rezonanţă într-un element combustibil este deci rezultatul a două efecte: unul de suprafaţă şi unul de volum.

În plus, o micşorare a capturii de rezonanţă apare şi datorită faptului că o parte a neutronilor nu intră în elementul combustibil în

timp ce traversează regiunea energetică de rezonanţă ci rămîn în moderator. Acest efect este însă mult mai mic decît cel descris anterior. În general, micşorarea capturii de rezonanţă, şi odată cu ea creşterea factorului p, compensează descreşterea factorului f. La aceasta se adaugă faptul că în cazul reactorilor omogeni, factorul ε este egal cu unitatea, în timp ce în cazul reactorilor eterogeni el este mai mare decît unitatea. Aceasta se datoreşte faptului că acei neutroni de fisiune, ce au energia cinetică suficientă pentru a produce fisiunea uraniului, nu sînt încetiniţi de nucleele de moderator din jur imediat după formarea lor, ca în cazul reactorului omogen, deoarece ei se află un anumit timp în combustibil, înainte de a trece în moderator.

Factorul η, care se referă numai la combustibilul însuşi şi este deci independent de modul în care este distribuit combustibilul în moderator, este acelaşi atît pentru reactorul eterogen cît şi pentru cel omogen. În consecinţă, factorul de multiplicare $k_\infty = p\eta f\varepsilon$ este, în general, mai mare într-un reactor eterogen decît în unul omogen cu acelaşi raport între numărul de nuclee de uraniu şi moderator. Deci, se poate construi un reactor eterogen (ex. Calder Hall) cu uraniu natural — combustibil şi grafit ca moderator, dar nu unul omogen, deoarece în cazul reactorului omogen, factorul de multiplicare k_∞ nu poate fi făcut suficient de mare. Vom trece acum la descrierea matematică a proceselor într-un reactor eterogen.

1. Factorul f

Calculul factorilor f, p etc. pentru reactorul eterogen urmează aceeaşi linie ca în cazul reactorului omogen. În locul centimetrului cub folosit în calcule în cazul reactorului omogen, aici vom alege pentru calcul o unitate de volum care este caracteristică reţelei eterogene. Structura şi periodicitatea acesteia este convenabilă pentru calcul. O astfel de unitate de volum este aşa numita celulă a reactorului eterogen. Fig. 4.2 arată împărţirea zonei active a unui reactor în celule. Barele de combustibil sînt aranjate într-o structură regulată oarecare, aici pătratică. Interspaţiul este umplut cu moderator. Cel mai simplu element al acestei structuri poate fi de exemplu pătratul arătat în figura 4.2, care desigur, din punct de vedere al calculului este dificil în special pentru luarea în consideraţie a condiţiilor la limită. Pentru a face calculul mai uşor se înlocuieşte celula de secţiune pătratică cu una de arie egală dar de secţiune circulară, aşa cum este arătat în fig. 4.2 prin cercul punctat. Eroarea ce apare este neglijabilă. De asemenea, presupunem că fluxul de neutroni nu se schimbă în direc-

Scanned with OKEN Scanner

ţia axială a barelor de combustibil. Aceasta înseamnă că, în comparaţie cu direcţia radială, el variază foarte puţin, în interiorul celulei, în direcţia axială. Modificarea fluxului de neutroni de la o celulă la alta este de asemenea neglijabilă la calculul fluxului în interiorul celulei. Cu aceste ipoteze putem alege ca celulă-unitate, un disc cu raza R_m şi cu înălţimea de un centimetru (fig. 4.2).

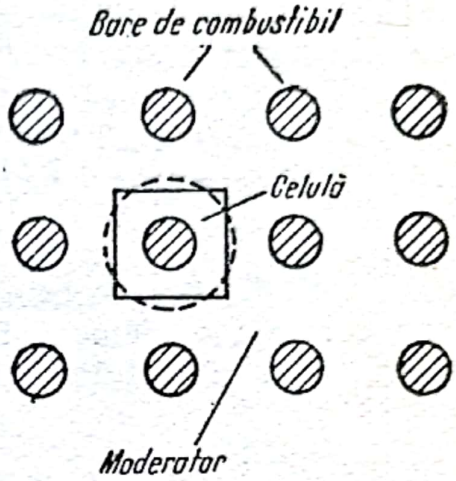


Fig. 4.2. Un mod de aranjare a barelor de combustibil şi împărţirea lor în unităţi celulare. Pătratul reprezintă unitatea celulară, cercul punctat, reprezintă o celulă idealizată.

Să calculăm factorul f pentru o astfel de celulă, scriind ca şi la deducerea ecuaţiei (2.109)

$$f = \frac{\Sigma_{au}\overline{\Phi}_u V_u}{\Sigma_{au}\overline{\Phi}_u V_u + \Sigma_{am}\overline{\Phi}_m V_m}. \qquad (4.1)$$

Aici, Σ_{au} este secţiunea macroscopică de absorbţie pentru neutronii termici în combustibil şi Σ_{am} în moderator. $\overline{\Phi}_u$ este fluxul de neutroni termici mediat în spaţiu în regiunea cu combustibil şi $\overline{\Phi}_m$ în zona cu moderator. Astfel

$$\overline{\Phi}_u = \frac{1}{V_u}\int_{V_u}\Phi_u dV, \quad \overline{\Phi}_m = \frac{1}{V_m}\int_{V_m}\Phi_m dV \qquad (4.2)$$

în care Φ_u este valoarea fluxului în combustibil, Φ_m în moderator, V_u volumul combustibilului într-o celulă, V_m volumul de moderator corespunzător. În cele ce urmează, indicele u se referă la combustibil, iar indicele m la regiunea cu moderator. Din ecuaţia (4.1)

$$f = \frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{au} + \Sigma_{am}\dfrac{\overline{\Phi}_m}{\overline{\Phi}_u}\dfrac{V_m}{V_u}}. \qquad (4.3)$$

Deoarece fluxul mediu în moderator este mai mare decît în combustibil, factorul f, dedus mai înainte, este mai mic decît într-un reactor omogen conţinînd aceeaşi cantitate de uraniu şi moderator. În ecuaţia (4.3), cantitatea $\overline{\Phi}_m/\overline{\Phi}_u$, aşa-numitul „factor de dezavantaj", urmează să fie determinată. Pentru aceasta trebuie să rezolvăm ecuaţia de difuzie în combustibil şi apoi în moderator, ţinînd seamă de condiţiile de trecere între cele două regiuni şi condiţia de limită pentru întreaga celulă.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia de difuzie aplicabilă combustibilului este

$$D_u \nabla^2 \Phi_u - \Sigma_{au} \Phi_u = 0. \tag{4.4}$$

Aceasta este ecuaţia de difuzie pentru neutronii termici, cu care ne-am întîlnit în teoria difuziei pentru reactorul omogen. Apare un termen de difuzie şi unul de absorbţie. Termenul pentru sursa de neutroni termici lipseşte, deoarece, aşa cum am arătat mai înainte, în regiunea cu combustibil nu are loc o încetinire substanţială a neutronilor.

O soluţie a ecuaţiei (4.4) este funcţia Bessel de ordinul zero, modificată, $I_0[(\Sigma_{au}/D_u)^{1/2} r]$. Este o funcţie similară funcţiei Bessel, dar, spre deosebire de aceasta, creşte începînd de la centrul elementului combustibil, ceea ce este de aşteptat, deoarece fluxul de neutroni pe axa centrală a elementului combustibil trebuie să fie minim. Astfel, fluxul de neutroni termici în elementul combustibil e dat de funcţia

$$\Phi_u = A_1 I_0(\varkappa_u r) \tag{4.5}$$

în care $\varkappa_u^2 = \Sigma_{au}/D_u$, iar r se măsoară de la axa celulei.

Ecuaţia de difuzie pentru regiunea cu moderator a celulei este

$$D_m \nabla^2 \Phi_m - \Sigma_{am} \Phi_m + q_{th} = 0. \tag{4.6}$$

Ţinînd seamă de încetinirea neutronilor în regiunea cu moderator, apare termenul sursă q_{th} pentru neutronii termici, care în interiorul celulei nu depinde de poziţie. O soluţie a ecuaţiei (4.6) este

$$\Phi_m = A_2 I_0(\varkappa_m r) + A_3 K_0(\varkappa_m r) + q_{th}/\Sigma_{am}. \tag{4.7}$$

Aici $K_0(\varkappa_m r)$ este funcţia Bessel modificată, care trebuie aleasă astfel ca toate condiţiile la limită pentru celulă să fie satisfăcute. Primii doi termeni în expresia (4.7) reprezintă soluţia generală a ecuaţiei (4.6), dacă q_{th} este egalat cu zero. Prin înlocuirea soluţiei (4.7) în ecuaţia (4.6) se poate verifica că (4.7) este soluţia completă a ecuaţiei (4.6).

Constantele A_1, A_2 şi A_3 urmează să fie determinate cu ajutorul condiţiilor la limită.

Din motive de simetrie, impunem ca o condiţie la limită pentru fiecare celulă, ca la starea staţionară, în medie, să nu existe neutroni care să intre sau să iasă din celulă. Aceasta impune ca

$$\left(\frac{\partial \Phi_m}{\partial r}\right)_{R_m} = 0. \tag{4.8}$$

Această condiţie trebuie satisfăcută pe întreaga suprafaţă cilindrică $r = R_m$ a celulei. Este adevărat că riguros vorbind, aceasta este valabil nu numai pentru valoarea medie a lui $\partial \Phi_m / \partial r$, dar deoarece, cum am presupus mai sus, schimbarea fluxului de la o celulă la alta e mică, ecuaţia (4.8) se aplică în orice caz cu o bună aproximaţie.

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile la limită la suprafața de separare dintre combustibil și moderator sînt

$$(\Phi_u)_{R_u}=(\Phi_m)_{R_u},\quad D_u\left(\frac{\partial\Phi_u}{\partial r}\right)=D_m\left(\frac{\partial\Phi_m}{\partial r}\right)_{R_u}. \tag{4.9}$$

Prima condiție exprimă continuitatea fluxului de neutroni termici la suprafața de separare combustibil-moderator, $r=R_u$, iar cea de-a doua arată că numărul de neutroni pe secundă ce traversează suprafața de separare între moderator și combustibil, dinspre moderator, este egal cu acela ce o traversează în sens invers, adică nu există un salt al numărului de neutroni la limita moderator-combustibil.

Aceste trei condiții la limită în ecuația (4.8) și (4.9), împreună cu ecuațiile (4.5) și (4.7), dau după cîteva transformări următoarea relație pentru A_1

$$\frac{1}{A_1}=\frac{\Sigma_{am}}{q_{th}}\left\{I_0(\varkappa_u R_u)-\frac{D_u\varkappa_u I_1[I_0(\varkappa_m R_u)K_1(\varkappa_m R_m)+K_0(\varkappa_m R_u)I_1(\varkappa_m R_m)]}{D_m\varkappa_m[I_1(\varkappa_m R_u)K_1(\varkappa_m R_m)-K_1(\varkappa_m R_u)I_1(\varkappa_m R_m)]}\right\}. \tag{4.10}$$

Funcțiile $I_1(\varkappa r)$ și $K_1(\varkappa r)$ sînt funcțiile Bessel ce rezultă din diferențierea funcțiilor I_0 și K_0.

Mărimile A_2 și A_3 au fost folosite în calculul lui A_1 și nu mai prezintă interes.

Factorul f, care a fost definit în paragraful 2.8 ca numărul de neutroni termici absorbit pe unitatea de volum și secundă în combustibil, împărțit prin numărul de neutroni ce devin termici în unitatea de volum și secundă, poate fi acum calculat. Alegem ca unitate de volum, celula (de rază R_m și înălțime 1 cm). Numărul de neutroni ce devin termici pe secundă în celulă este $q_{th}\cdot\pi(R_m^2-R_u^2)$, iar numărul de neutroni termici absorbiți în regiunea cu combustibil este

$$2\pi\int_0^{R_u}\Sigma_{au}\Phi_u(r)r\,dr=2\pi\,\Sigma_{au}A_1\int_0^{R_u}rI_0(\varkappa_u r)dr=$$

$$=\frac{2\pi A_1\Sigma_{au}R_u}{\varkappa_u}I_1(\varkappa_u R_u).$$

Atunci, factorul f devine

$$f=\frac{2\pi\Sigma_{au}R_uI_1(\varkappa_u R_u)}{\pi q_{th}(R_m^2-R_u^2)\varkappa_u}A_1$$

sau, după înlocuirea lui A_1 conform ecuației (4.10),

$$\frac{1}{f}=\frac{V_m\Sigma_{am}}{V_u\Sigma_{au}}\left[\frac{\varkappa_u R_u}{2}\frac{I_0(\varkappa_u R_u)}{I_1(\varkappa_u R_u)}\right]+$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\frac{\varkappa_m(R_m^2-R_u^2)}{2R_u}\left[\frac{I_0(\varkappa_m R_u)K_1(\varkappa_m R_m)+K_0(\varkappa_m R_u)I_1(\varkappa_m R_m)}{I_1(\varkappa_m R_m)K_1(\varkappa_m R_u)-K_1(\varkappa_m R_m)I_1(\varkappa_m R_u)}\right] \tag{4.11}$$

care se poate scrie, mai restrîns, sub forma

$$f=\frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{au}+\Sigma_{am}\dfrac{V_m}{V_u}\left[F+\dfrac{V_u}{V_m}\dfrac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}}(E-1)\right]} \tag{4.12}$$

în care

$$F=\frac{k_u R_u}{2}\frac{I_0(k_u R_u)}{I_1(k_u R_u)},$$

$$E=\frac{\varkappa_m(R_m^2-R_u^2)}{2R_u}\frac{I_0(\varkappa_m R_u)\cdot K_1(\varkappa_m R_m)+K_0(\varkappa_m R_u)\cdot I_1(\varkappa_m R_m)}{I_1(\varkappa_m R_m)K_1(\varkappa_m R_u)-K_1(\varkappa_m R_m)I_1(\varkappa_m R_u)}. \tag{4.13}$$

O comparaţie a ecuaţiilor (4.3) şi (4.13) arată că factorul de dezavantaj $\overline{\Phi}_m/\overline{\Phi}_u$ este dat de expresia

$$\frac{\overline{\Phi}_m}{\overline{\Phi}_u}=F+\frac{V_u}{V_m}\frac{\Sigma_{au}}{\Sigma_{am}}(E-1). \tag{4.14}$$

Deoarece al doilea termen din ecuaţia (4.14) este mult mai mic decît primul, se poate scrie cu o bună aproximaţie

$$\frac{\overline{\Phi}_m}{\overline{\Phi}_u}=F. \tag{4.15}$$

Formule similare cu acestea deduse pentru celulele cilindrice pot fi obţinute şi pentru alte forme de celule, sferice de exemplu. Practic însă, celulele cilindrice prezintă cel mai mare interes.

2. Factorul p

În timp ce factorul f pentru un reactor eterogen poate fi calculat relativ precis, în cazul factorului p aceasta rămîne de discutat. Dificultatea majoră în determinarea factorului p constă în necunoaşterea aşa numitor constante de grup. Există constante, cum ar fi $\varkappa$, Σ_a etc., care pot fi măsurate precis în regiunea termică. Totuşi în regiunea rezonanţelor, unde definirea acestor mărimi nu este simplă, măsurarea lor este posibilă numai indirect şi este în consecinţă pasibilă de erori mari. Prin urmare, propunem să ne mărginim la prezentarea unei teorii simplificate a calculului factorului p.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul factorului p în reactorul eterogen se face în același mod în care s-a făcut și în cazul reactorului omogen. În plus, trebuie să se considere separat captura de rezonanță în combustibil, la suprafață și în interiorul regiunii cu combustibil.

Această împărțire apare chiar în integrala de rezonanță sau în secțiunea eficace de absorbție notată în ecuația (2.108) pentru reactorul omogen prin $(\sigma_{au})_{ef}$.

Considerînd regiunea cu combustibil a unei celule, atunci absorbția de volum și deci absorbția de rezonanță ce revine regiunii cu combustibil este proporțională cu numărul de atomi de combustibil conținuți în acest volum și egală cu $a(E)N_uV_u$. Aici $a(E)$ este un factor care depinde de energia neutronului și de proprietățile de material ale combustibilului și nu depinde de geometria celulei. N_u este numărul de atomi de combustibil pe cm³ și V_u volumul regiunii cu combustibil din celulă.

Absorbția de suprafață este proporțională cu suprafața regiunii cu combustibil în celulă (unde se consideră numai suprafața cilindrică și nu cele două suprafețe terminale) și, de asemenea, cu densitatea superficială a atomilor de uraniu pe suprafața regiunii cu combustibil. În consecință, dacă S este aria combustibilului în celulă și N'_u densitatea superficială a atomilor de combustibil, absorbția de suprafață este $b'(E)N'_uS$. Aici $b'(E)$ este o constantă dependentă numai de energie. Absorbția totală, de volum și de suprafață, împărțită prin $N_u V_u$ dă secțiunea eficace de absorbție pentru neutronii de rezonanță în reactorul eterogen

$$(\sigma_{au}(E))_{ef}=a(E)+b'(E)\frac{SN'_u}{N_uV_u}. \tag{4.16}$$

Pentru a exprima această relație într-o formă mai uzuală, introducem un alt factor, masa unui atom de combustibil, și obținem

$$(\sigma_{au}(E))_{ef}=a(E)+b(E)\frac{S}{M}. \tag{4.17}$$

Aici b este o nouă constantă și M este masa combustibilului în celulă.

Semnificația secțiunii eficace de absorbție $(\sigma_{au}(E))_{ef}$ este aceeași ca și în cazul reactorului omogen. Ea a fost definită în ecuația (2.108), ca produsul dintre secțiunea reală de absorbție și probabilitatea pe cm³ ca neutronul să fie împrăștiat. Atunci,

$$(\sigma_{au})_{ef}=\frac{\Sigma_s}{\Sigma_s+\Sigma_a}\sigma_{au}. \tag{4.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă vrem să calculăm factorul p pentru reactorul eterogen putem proceda în același mod ca și în cazul reactorului omogen. Scriem ecuația (2.104) în forma

$$dQ = -Q \frac{1}{\xi} \frac{dE}{E} \cdot W_a \tag{4.19}$$

unde Q este densitatea de încetinire raportată la o celulă și W_a probabilitatea ca un neutron să fie absorbit per reacție, ca în cazul omogen. Atunci

$$W_a = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + \Sigma_s} = \frac{N_u}{\Sigma_s} \frac{\Sigma_s}{\Sigma_a + \Sigma_s} \sigma_{au} = \frac{N_u}{\Sigma_s} (\sigma_{au})_{ef}. \tag{4.20}$$

În cazul reactorului eterogen, $(\sigma_{au})_{ef}$ constă din două părți: $a(E)$ și $b(E)S/M$. Dacă aplicăm aici $(\sigma_{au})_{ef}$ astfel definit, atunci trebuie să ne amintim că în zona centrală a combustibilului, unde are loc absorbția de volum, fluxul mediu este diferit de acela din regiunea absorbției de suprafață. Să considerăm că fluxul mediu pe unitatea de energie în interiorul combustibilului este $\overline{\varphi}_u$ și că în regiunea absorbției de suprafață este $\overline{\varphi}'_u$.

Termenul de volum pentru probabilitatea W_a, în reactorul eterogen, corespunzător ecuației (4.20), este

$$\frac{N_u V_u \overline{\varphi}_u}{N_m V_m \overline{\Phi}_m \sigma_{sm}} a(E) \tag{4.21}$$

unde σ_{sm} este secțiunea de împrăștiere în moderator. Termenul de suprafață corespunzător este

$$\frac{N_u V_u \overline{\varphi}'_u}{N_m V_m \overline{\varphi}_m \sigma_{sm}} b(E) \frac{S}{M}. \tag{4.22}$$

Atunci ecuația pentru W_a devine

$$W_a = \frac{N_u V_u}{\sigma_{sm} N_m V_m} \left[\frac{\overline{\varphi}_u}{\overline{\varphi}_m} a(E) + \frac{\overline{\varphi}'_u}{\overline{\varphi}_m} b(E) \frac{S}{M} \right]. \tag{4.23}$$

Dacă înlocuim această expresie în ecuația (4.19), atunci după integrare obținem factorul p

$$p = \exp \left[- \frac{N_u V_u}{\sigma_{sm} N_m V_m \xi} \int_{E_{th}}^{E_f} \left\{ \frac{\overline{\varphi}_u(E)}{\overline{\varphi}_m(E)} a(E) + \frac{S}{M} \frac{\overline{\varphi}'_u(E)}{\overline{\varphi}_m(E)} b(E) \right\} \frac{dE}{E} \right] \tag{4.24}$$

Dificultatea principală în evaluarea practică a ecuației (4.24) constă în faptul că factorii de dezavantaj pentru regiunea de rezonanță sînt greu de stabilit. Este adevărat că datorită scăderii mari a fluxului de

Scanned with OKEN Scanner

rezonanță în regiunea de suprafață a combustibilului se poate aproxima fluxul mediu $\overline{\varphi'_u}$ pentru suprafață, prin fluxul mediu din interiorul volumului, dar și atunci constantele valabile pentru regiunea de rezonanță lipsesc în calculul lui $\overline{\varphi_u}/\overline{\varphi_m}$. Dacă aceste constante sînt determinate empiric, atunci factorul de dezavantaj pentru regiunea de rezonanță poate fi calculat în același mod în care a fost calculat teoretic factorul f. Cantitățile $a(E)$ și $b(E)$ din integrala de rezonanță trebuie să fie de asemenea determinate empiric.

3. Factorul ε

Neutronii cu energie cinetică foarte mare, peste 1 MeV, sînt capabil să fisioneze nucleele de uraniu și deci să producă noi neutroni de fisiune, direct, adică nu prin intermediul procesului de încetinire în moderator. Astfel eliberarea de neutroni de fisiune și deci de neutroni termici este ceva mai mare într-un reactor eterogen decît în unul omogen. Această creștere nu este foarte mare: în general, aproximativ 3 procente, dar pentru un reactor care folosește uraniu natural, unde economia de neutroni este foarte importantă, aceste 3 procente reprezintă o contribuție însemnată la factorul de multiplicare.

Neutronii de fisiune de mare energie nu cedează energie în regiunea cu combustibil prin ciocniri elastice cu nucleele de uraniu, în timp ce traversează această zonă. Ei pierd energie numai prin ciocniri neelastice cu atomii de uraniu. Pierderea de energie prin ciocniri elastice este neglijabilă. Aceasta este adevărat numai în cazul cînd combustibilul este uraniu pur. Chiar și o mică concentrație de substanțe cu masă atomică mică modifică probabilitatea de încetinire în regiunea cu combustibil, astfel că producerea fisiunii cu ajutorul neutronilor rapizi devine neglijabilă. În calculul ce urmează pentru factorul ε ne limităm la cazul uraniului pur în regiunea cu combustibil.

Calculul are o anumită asemănare cu cel făcut la deducerea factorului de multiplicare k_∞. Să urmărim evoluția a z neutroni produși simultan în regiunea cu combustibil. Fie w probabilitatea ca un astfel de neutron de fisiune să interacționeze cu un atom de uraniu și să nu părăsească regiunea cu combustibil. Reacțiile posibile în combustibil sînt: fisiunea, împrăștierea elastică și neelastică cu secțiunile eficace microscopice σ_f, σ_e și respectiv σ_i. Însumînd aceste secțiuni eficace, secțiunea totală va fi σ.

Să considerăm la început, multiplicarea sau bilanțul acestor neutroni rapizi care, datorită energiei lor mari, pot fisiona atomii de uraniu.

Scanned with OKEN Scanner

Numărul de reacţii primare ce apar în combustibil, cauzate de cei z neutroni de fisiune, este $z \cdot w$. Din acestea, σ_f/σ sînt fisiuni iar σ_e/σ ciocniri elastice. Ca rezultat al fisiunilor, sînt produşi $\nu(\sigma_f/\sigma) \cdot z \cdot w$ noi neutroni de fisiune (ν are aceeaşi semnificaţie ca în paragraful 2.8). Practic, aceşti neutroni rapizi nu pierd energie prin ciocniri elastice cu nucleele de uraniu, aşa că după prima ciocnire, $(\sigma_e/\sigma) \cdot z \cdot w$ neutronii sînt capabili ca neutroni rapizi să producă alte fisiuni. În total deci, după prima ciocnire un număr de $[(\nu\sigma_f+\sigma_e)/\sigma]z \cdot w$ sînt capabili să producă fisiuni.

Din aceşti $[(\nu\sigma_f+\sigma_e)/\sigma]z \cdot w$ neutroni, o anumită parte vor ciocni din nou nucleele de uraniu. Probabilitatea celei de-a doua ciocniri şi a următoarelor are totuşi o valoare întrucîtva diferită de aceea pentru prima ciocnire, deoarece prima fisiune cu neutroni este produsă prin absorbţia neutronilor termici, care are loc în regiunea periferică a combustibilului. Prima reacţie cu atomii de uraniu, va avea loc în aceeaşi regiune, în timp ce reacţiile următoare se vor distribui repede în întreaga regiune cu combustibil. Probabilitatea reacţiilor următoare în regiunea cu combustibil va fi în consecinţă mai mare decît aceea pentru prima reacţie. Vom nota probabilitatea pentru a doua reacţie şi următoarele prin w', spre deosebire de w, probabilitatea pentru prima reacţie.

Din cei $[(\nu\sigma_f+\sigma_e)/\sigma]z \cdot w$ neutroni rapizi ce sînt disponibili după prima reacţie a celor z neutroni de fisiune, $[(\nu\sigma_f+\sigma_e)/\sigma] \cdot zww'$ produc a doua reacţie, astfel că după a doua reacţie sînt prezenţi un număr de

$$\left(\frac{\nu\sigma_f+\sigma_e}{\sigma}\right)^2 zww' = z\frac{w}{w'}\left(\frac{\nu\sigma_f+\sigma_e}{\sigma}\,w'\right)^2$$

neutroni. Cu reacţiile următoare se poate raţiona asemănător. După n reacţii, $z\frac{w}{w'}\left[\frac{\nu\sigma_f+\sigma_e}{\sigma}\,w'\right]^n$ neutroni sînt prezenţi, sau $z\frac{w}{w'}\left[\frac{\nu\sigma_f+\sigma_e}{\sigma}\,w'\right]^{n-1}$ înainte de cea de-a n-a reacţie.

Pentru a calcula factorul ε trebuie să ştim proporţia de neutroni ce ies după fiecare reacţie din regiunea cu combustibil şi intră în moderator sau produc ciocniri neelastice în regiunea cu combustibil. În ambele cazuri putem presupune că aceşti neutroni sînt pierduţi pentru fisiunea cu neutroni rapizi, căci intrînd în regiunea cu moderator ei vor fi foarte repede încetiniţi înainte de a reveni în regiunea cu combustibil, iar în cazul ciocnirii neelastice, ei pierd atît de multă energie că nu se mai poate pune problema de a produce fisiune.

Probabilitatea primei reacţii în combustibil a fost w. Atunci $1-w$ este probabilitatea ca un neutron de fisiune să nu se ciocnească în combustibil ci să părăsească această regiune. Totuşi, din zw neutroni care produc o primă reacţie, σ_t/σ sînt încetiniţi şi nu mai pot produce acest

Scanned with OKEN Scanner

gen de fisiune. Atunci, numărul total de neutroni ce sînt eliminaţi la prima ciocnire este

$$z(1-w)+zw\frac{\sigma_i}{\sigma}=zw\left[\frac{1-w}{w}+\frac{\sigma_i}{\sigma}\right],$$

înainte de cea de-a n-a reacţie sînt prezenţi $z\frac{w}{w'}\left[\frac{\nu\sigma_f+\sigma_e}{\sigma}w'\right]^{n-1}$ neutroni rapizi, din care $(1-w')$ părăsesc zona cu combustibil şi $w'(\nu\sigma_i/\sigma)$ sînt încetiniţi. Atunci, la a n-a reacţie, un număr de

$$z\frac{w}{w'}\left(\frac{\nu\sigma_f+\sigma_e}{\sigma}w'\right)^{n-1}\left(1-w'+w'\frac{\sigma_i}{\sigma}\right)$$

neutroni sînt eliberaţi ca neutroni rapizi.

Pentru a calcula factorul ε trebuie să însumăm neutronii ce se pierd la fiecare reacţie

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left\{zw\left[\frac{1-w}{w}+\frac{\sigma_i}{\sigma}\right]+zw\left[\frac{1-w'}{w'}+\frac{\sigma_i}{\sigma}\right]\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\nu\sigma_f+\sigma_e}{\sigma}w'\right)^{n-1}\right\}=$$

$$=w\left\{\left[\frac{1-w}{w}+\frac{\sigma_i}{\sigma}\right]+\frac{\frac{1-w'}{w'}+\frac{\sigma_i}{\sigma}}{1-\frac{\nu\sigma_f+\sigma_e}{\sigma}w'}\right\}. \qquad (4.25)$$

Probabilităţile de reacţie w şi w' pot fi calculate. Totuşi, deoarece evaluarea lor teoretică este dificilă, se recomandă apelarea la date empirice. De asemenea, secţiunile eficace se obţin numai pe calea unor măsurători complicate.

4. Condiţia de criticitate pentru reactorul eterogen

Teoria reactorului eterogen a fost elaborată astfel încît condiţia de criticitate, dedusă din ecuaţia (2.142) pentru reactorul omogen, este aplicabilă şi în cazul reactorului eterogen. Mărimile ce apar în ecuaţia de criticitate trebuie să fie alese astfel încît să satisfacă această condiţie. Rămîn de modificat mărimile ce mai apar în ecuaţia de criticitate, adică η, al patrulea factor, factorul de multiplicare k_∞, factorul de formă B, vîrsta Fermi τ şi lungimea de difuzie L.

Scanned with OKEN Scanner

După cum s-a arătat mai înainte, în cazul reactorului eterogen factorul η și vîrsta Fermi pentru același moderator au aceeași valoare ca și în cazul reactorului omogen, deoarece atomii de uraniu nu au practic nici un rol în încetinirea neutronilor. Factorul de formă B, ca factor geometric pentru volumul reactorului, este dependent de alți parametri. Rolul său este același ca și în cazul reactorului omogen.

Lungimea de difuzie L este aici definită ca $L=(D/\overline{\Sigma}_a)^{1/2}$, în care, ca și la reactorul omogen, putem substitui pentru constanta de difuzie D valoarea ei pentru moderator, iar $\overline{\Sigma}_a$ este secțiunea medie de absorbție pentru neutronii termici, dată de relația

$$\overline{\Sigma}_a = \frac{V_m \Sigma_{am} \overline{\Phi}_m + V_u \Sigma_{au} \overline{\Phi}_u}{V_m \overline{\Phi}_m + V_u \overline{\Phi}_u} \tag{4.26}$$

cu aceleași notații ca în paragraful 4.1.

Înlocuind ecuația (4.3) în ecuația (4.26), se obține

$$\overline{\Sigma}_a = \frac{\Sigma_m}{1-f} \cdot \frac{V_m}{V_m + V_u \dfrac{\overline{\Phi}_u}{\overline{\Phi}_m}}$$

în care, dat fiind că V_u este întotdeauna mult mai mic decît V_m, putem scrie

$$\overline{\Sigma}_a = \frac{\Sigma_m}{1-f}. \tag{4.27}$$

Lungimea de difuzie devine

$$L = \left(\frac{D}{\overline{\Sigma}_m}\right)^{1/2} = L_m (1-f)^{1/2}. \tag{4.28}$$

unde L_m este lungimea de difuzie pentru moderatorul pur. Ecuația (4.28) este aceeași cu cea dedusă mai înainte pentru reactorul omogen.

Astfel, ecuația de criticitate pentru reactorul eterogen a fost dedusă într-un mod asemănător cu aceea pentru reactorul omogen.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

TEORIA BIGRUPALĂ

În acest capitol, cu ajutorul teoriei bigrupale vor fi rezolvate două probleme: teoria reactorului cu reflector şi efectul de reactivitate a unei bare de control în centrul zonei active.

În studiul ecuaţiei de difuzie am impus următoarele condiţii la limită: condiţia ca atît fluxul de neutroni termici cît şi cel de neutroni rapizi să tindă la zero la suprafaţa exterioară a reactorului. În principiu, această condiţie nu este satisfăcută niciodată, deoarece la suprafaţa reactorului va fi întotdeauna un anumit număr de neutroni. Aceasta rezultă din teoria difuziei, şi pentru demonstrare se poate folosi o argumentare similară cu cea folosită în paragraful 2.6. Rezultatul este că în calculul factorului geometric reactorul este considerat ceva mai mare decît zona activă reală. Creşterea aparentă a dimensiunilor zonei active este

$$d \approx \frac{2}{3} \lambda_{tr}$$

în care d este numită „distanţă de extrapolare", deoarece se extrapolează fluxul de neutroni în afara zonei active pînă cînd se anulează la o distanţă d de perete, iar λ_{tr} este drumul liber mijlociu de transport. Distanţa de extrapolare este totuşi foarte mică şi în general nesemnificativă în calculele reactorului. Pentru aceasta am neglijat-o pînă acum şi în multe cazuri o vom neglija şi în cele ce urmează.

Reflectorul dă o creştere aparentă a dimensiunilor zonei active şi deci o descreştere a pierderilor de neutroni. Reflectorul e format dintr-o substanţă difuzantă de neutroni, de exemplu grafit, apă, apă grea etc. Prin înconjurarea zonei active cu un reflector, ne asigurăm că fluxul de neutroni tinde la zero la distanţa δ în afara zonei active (fig. 5.1); δ este numit „economie de reflector". Să deducem o formulă simplă pentru economia de reflector, cu ajutorul teoriei monogrupale, care este utilă doar pentru a face o estimare a lui δ. Teoria bigrupală ne va da o formulă mai exactă.

Deoarece ne propunem să folosim o teorie monogrupală, putem considera numai difuzia neutronilor *termici* în zona activă şi în reflector. Să presupunem, în plus, că zona activă a reactorului este atît de mare,

Scanned with OKEN Scanner

încît putem considera suprafaţa de separare între zona activă şi reflector ca plană şi în consecinţă putem folosi funcţiile trigonometrice sau exponenţiale în locul funcţiilor Bessel. Grosimea reflectorului se va presupune mare în comparaţie cu lungimea de difuzie L_r a neutronilor termici în reflector.

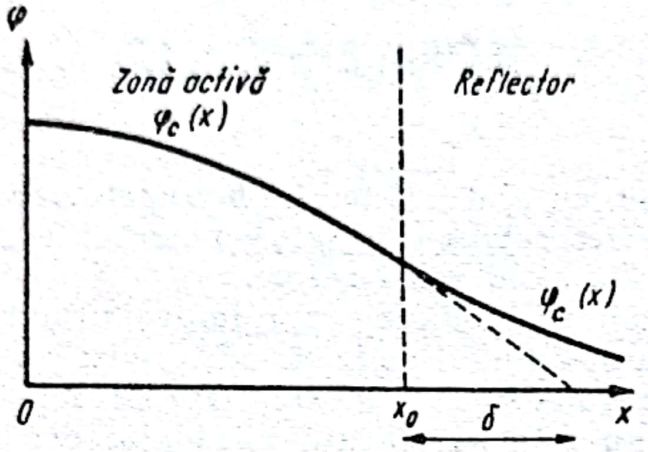


Fig. 5.1. Fluxul real de neutroni (linia continuă) şi fluxul aparent (linia întreruptă). Abscisa $x=0$ reprezintă centrul reactorului, $x=x_0$ suprafaţa de separaţie între zona activă şi reflector.

Considerăm că fluxul termic în zona activă este $\Phi_c(x)$, unde x este direcţia normală la planul ce separă zona activă de reflector (fig. 5.1); fie acest plan $x=x_0$. Fluxul de neutroni în reflector este notat cu $\Phi_r(x)$, iar diferitele constante ce intervin ca: constanta de difuzie, lungimile de difuzie etc., sînt marcate cu c sau r în funcţie de zona la care se referă. Condiţiile la limită la suprafaţa de separare între zona activă şi reflector sînt: continuitatea fluxului

$$\Phi_c(x_0)=\Phi_r(x_0) \tag{5.1}$$

şi egalitatea densităţii curenţilor de difuzie j

$$j(x_0)=-D_c\frac{\partial\Phi_c(x_0)}{\partial x}=-D_r\frac{\partial\Phi_r(x_0)}{\partial x}. \tag{5.2}$$

Cele două funcţii $\Phi_c(x)$ şi $\Phi_r(x)$ diferită substanţial una de cealaltă, în acest exemplu simplu, prin aceea că $\Phi_c(x)$ este convexă în sus şi $\Phi_r(x)$ este convexă în jos. Aceasta rezultă din ecuaţiile diferenţiale pe care funcţia $\Phi(x)$ le satisface în cele două regiuni $x<x_0$ şi $x>x_0$. Pentru zona activă este valabilă ecuaţia (2.115)

$$D_c\nabla^2\Phi_c+\Sigma_a[k_\infty\exp(-B^2\tau)-1]\Phi_c=0 \tag{5.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\nabla^2\Phi_c + B_c^2\Phi_c = 0 \tag{5.4}$$

în care pătratul factorului B_c este o cantitate pozitivă. În cazul unidimensional ce se tratează aici, soluția ecuației (5.4) este o funcție cosinusoidală, a cărei curbură, pentru valorile pozitive ale lui Φ_c, are totdeauna convexitatea în sus. Pentru regiunea cu reflector, unde putem presupune că nu există nici o sursă de neutroni termici, ecuația corespunzătoare ecuației (5.3) apare fără termenul de sursă $k_\infty \exp(-B^2\tau)$

$$D_r\nabla^2\Phi_r - \Sigma_a\Phi_r = 0, \quad \nabla^2\Phi_r - \frac{1}{L_r^2}\Phi_r = 0 \tag{5.5}$$

sau

$$\nabla^2\Phi_r + B_r^2\Phi_r = 0. \tag{5.6}$$

Aici, deoarece B_r^2 este negativ, B_r este o cantitate imaginară. Soluțiile ecuației (5.6) sînt funcții exponențiale, care pentru valori pozitive ale lui $\Phi(x)$ sînt întotdeauna concave în sus. Forma reală a curbei fluxului de neutroni $\Phi(x)$ va fi atunci aproximată prin curba desenată în fig. 5.1.

Dacă dorim să definim o cantitate care să arate cît se economisește din materialul zonei active, prin introducerea unui reflector, este rezonabil să facem uz de extrapolarea funcției fluxului de neutroni $\Phi(x)$ în zona cu reflector, marcată prin linia întreruptă din fig. 5.1. Economia de reflector δ este atunci distanța de la suprafața de separare x_0 pînă în punctul în care funcția astfel extrapolată taie axa x; putem atunci efectua calculul ca și cînd nu ar fi prezent nici un reflector, dar dimensiunile zonei active ar fi mai mari cu lungimea δ.

Dacă dorim să obținem o formulă aproximativă pentru economia de reflector δ, extrapolăm curba din fig. 5.1 printr-o tangentă în punctul $x = x_0$. Atunci, conform fig. 5.1, avem

$$\frac{\partial\Phi_c(x_0)}{\partial x} = -\frac{\Phi_c(x_0)}{\delta}. \tag{5.7}$$

Din aceasta, folosind ecuațiile (5.1) și (5.2), avem

$$\delta = -\frac{D_c}{D_r}\frac{\Phi_r(x_0)}{\dfrac{\partial\Phi_r(x_0)}{\partial x}}. \tag{5.8}$$

Obținem o aproximație pentru cantitatea $\Phi_r(x_0) \Big/ \dfrac{\partial\Phi_r(x_0)}{\partial x}$ din ecuația (5.5), a cărei soluție este

$$\Phi_r(x) = \Phi_r(x_0)\exp\left(-\frac{x-x_0}{L_r}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru valori mici ale lui $(x-x_0)/L_r$ putem scrie

$$\Phi_r(x) = \Phi_r(x_0)\left(1 - \frac{x-x_0}{L_r}\right)$$

și

$$\frac{\partial \Phi_r(x)}{\partial x} = -\Phi_r(x_0)\frac{1}{L_r}. \tag{5.9}$$

În final, pentru economia reflectorului obținem, din ecuațiile (5.8) și (5.9),

$$\delta = \frac{D_c}{D_r} \cdot L_r. \tag{5.10}$$

1. Teoria bigrupală a reflectorului

Calculul de mai sus pentru economia de reflector, efectuat folosind teoria monogrupală, este aproximativ și nu poate furniza un rezultat suficient de exact, pe de o parte datorită ipotezelor simplificatoare pe care le-am făcut prin extrapolarea liniară a fluxului de neutroni și pe de altă parte fiindcă nu s-a ținut seamă de faptul că nu numai neutronii termici difuzează din zona activă în reflector și invers. ci și neutronii rapizi. Dacă dorim să fim mai exacți, trebuie să considerăm și difuzia neutronilor rapizi în reflector.

Ca și în teoria monogrupală, în teoria bigrupală se folosește o idealizare a procesului de difuzie, presupunînd că neutronii se pot împărți în două grupe de energie, grupa neutronilor rapizi și grupa neutronilor lenți, termici. Fiecare din aceste grupe se tratează ca și cînd toți neutronii dintr-o grupă ar avea aceeași energie. Aceasta are avantajul că grupele individuale se pot trata prin teoria simplă a difuziei, la fel ca și în cazul neutronilor termici. Această ipoteză este o idealizare deoarece domeniul de energie al grupului rapid este foarte larg. În plus, ca și la determinarea factorului p pentru reactorul eterogen, se folosesc valori empirice pentru constantele de grup ce apar în ecuația de difuzie a neutronilor rapizi. Dificultatea principală în folosirea teoriei multigrupale este de asemenea determinarea precisă a constantelor de grup.

Începem prin scrierea ecuațiilor de difuzie pentru două grupe de neutroni și în primul rînd pentru zona activă. Următoarele ipoteze sînt valabile pentru grupul de neutroni rapizi: toți neutronii au aceeași energie (de fapt o energie medie). Sursa de neutroni pentru acest grup sînt neutronii de fisiune. Dacă Σ^{th} este secțiunea de absorbție a neutronilor termici și Φ^{th} fluxul de neutroni pentru grupul termic, atunci un număr de $\Sigma^{th}\Phi^{th}\eta f\varepsilon = \Sigma^{th}\Phi^{th}(k_\infty/p)$ neutroni de fisiune sînt produși pe

Scanned with OKEN Scanner

cm³ şi secundă. Se presupune că regiunea de rezonanţă se află în partea de energii mici a grupului neutronilor rapizi, ipoteză justificată în cazul teoriei bigrupale. Prin urmare factorul p este scos în afara factorului de multiplicare k_∞, O parte, $D^f\nabla^2\Phi^f$, a neutronilor rapizi difuzează în exterior. D^f este constanta de difuzie şi Φ^f fluxul neutronilor rapizi. Există două căi de pierdere a neutronilor rapizi. Una este captura de rezonanţă în zona de energie joasă, a doua prin încetinire şi intrarea în grupa neutronilor termici. Pentru ambele căi, numărul de neutroni rapizi ce dispare e proporţional cu fluxul neutronilor rapizi Φ^f; astfel putem scrie că numărul de neutroni ce părăsesc grupul neutronilor rapizi pe cm³ şi secundă este $\Sigma^f\Phi^f$, introducînd un coeficient fictiv de absorbţie Σ^f. Atunci, ecuaţia de difuzie pentru grupul neutronilor rapizi devine

$$D^f\nabla^2\Phi^f-\Sigma^f\Phi^f+\frac{k_\infty}{p}\Sigma^{th}\Phi^{th}=0. \qquad (5.11)^{1)}$$

Termenul sursă pentru grupul termic este $\Sigma^f\Phi^f p$. El e mai mic de p ori decît numărul de neutroni rapizi ce se pierd, $\Sigma^f\Phi^f$, deoarece, înainte ca ei să intre în grupul termic, fracţiunea $1-p$ se pierde prin absorbţia de rezonanţă. Ecuaţia de difuzie pentru grupul termic este, în consecinţă,

$$D^{th}\nabla^2\Phi^{th}-\Sigma^{th}\Phi^{th}+p\,\Sigma^f\Phi^f=0. \qquad (5.12)$$

Pentru a simplifica calculul, luăm factorul p în interiorul lui Φ^f, astfel că fluxul Φ^f care apare în ecuaţiile ce urmează este mai mic decît fluxul real al neutronilor rapizi de p ori. Modul în care trebuie să se pondereze fluxul Φ^f prin factorul p depinde de poziţia regiunii de rezonanţă în grupul rapid. Cu aceste precizări, scriem ecuaţiile (5.11) şi (5.12) sub forma

$$D^f\nabla^2\Phi^f-\Sigma^f\Phi^f+k_\infty\Sigma^{th}\Phi^{th}=0 \qquad (5.13)$$

$$D^{th}\nabla^2\Phi^{th}-\Sigma^{th}\Phi^{th}+\Sigma^f\Phi^f=0. \qquad (5.14)$$

Aceste ecuaţii sînt cu derivate parţiale, de ordinul doi, cu două variabile Φ^f şi Φ^{th} şi le putem converti într-o ecuaţie diferenţială de ordinul patru cu o singură variabilă în modul următor: aplicăm operatorul $D^{th}\nabla^2-\Sigma^{th}$ ecuaţiei (5.13). Aceasta înseamnă că aplicăm operatorul ∇^2 ecuaţiei şi apoi o înmulţim cu D^{th}, iar din acest produs scădem apoi ecuaţia (5.13) înmulţită cu Σ^{th}. Înmulţim ecuaţia (5.14) cu $k_\infty\Sigma^{th}$ şi obţinem

$$(D^{th}\nabla^2-\Sigma^{th})D^f\nabla^2\Phi^f-(D^{th}\nabla^2-\Sigma^{th})\Sigma^f\Phi^f+(D^{th}\nabla^2-\Sigma^{th})k_\infty\Sigma^{th}\Phi^{th}=0$$

$$k_\infty\Sigma^{th}\Sigma^f\Phi^f+k_\infty\Sigma^{th}(D^{th}\nabla^2-\Sigma^{th})\Phi^{th}=0$$

---

1) În fiecare caz, grupul neutronilor rapizi este notat cu *f* în partea de sus dreapta, iar cu *th* grupul neutronilor termici.

Scanned with OKEN Scanner

Scăzînd a doua ecuaţie din prima, avem

$$D^{th}D^{f}\nabla^4\Phi^f-(\Sigma^{th}D^f+\Sigma^fD^{th})\nabla^2\Phi^f-\Sigma^{th}\Sigma^f(k_\infty-1)\Phi^f=0. \qquad (5.15)$$

Operatorul ∇^4 indică utilizarea de două ori succesiv a operatorului ∇^2.

Se poate, de asemenea, scrie ecuaţia (5.15) sub forma

$$\left\{\nabla^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}-\left\{\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}\right)^2+\frac{4(k_\infty-1)}{L^2\tau}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\nabla^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}+\left\{\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}\right)^2+\frac{4(k_\infty-1)}{L^2\tau}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\Phi^f=0 \qquad (5.16)$$

în care $D^{th}/\Sigma^{th}=L^2$ şi $D^f/\Sigma^f=\tau$. Se poate verifica identitatea ecuaţiilor (5.15) şi (5.16), efectuînd înmulţirea din ecuaţia (5.16).

Pentru calcule, operatorul ∇^2 poate fi considerat o constantă. Ecuaţia (5.15) este o ecuaţie patratică în ∇^2, care poate fi împărţită în doi factori, ca în ecuaţia (5.16). Fiecare din aceşti factori ai ecuaţiei (5.16) trebuie să fie egali cu zero, astfel că din (5.16) obţinem două ecuaţii reciproc independente

$$\nabla^2\Phi^f+B_1^2\Phi^f=0 \qquad (5.17)$$

şi

$$\nabla^2\Phi^f+B_2^2\Phi^f=0 \qquad (5.18)$$

cu notaţiile

$$B_1^2=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}-\left\{\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}\right)^2+\frac{4(k_\infty-1)}{L^2\tau}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (5.19)$$

şi

$$B_2^2=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}+\left\{\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}\right)^2+\frac{4(k_\infty-1)}{L^2\tau}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (5.20)$$

B_1 şi B_2 fiind factorii de material. B_1^2 este negativ, B_2^2 e pozitiv, astfel că B_1 e o mărime imaginară, iar B_2 una reală.

Dacă am fi eliminat din ecuaţiile (5.13) şi (5.14) pe Φ^f, atunci am fi obţinut aceeaşi ecuaţie (5.16), dar cu variabila Φ^{th} în loc de Φ^f. Fluxul Φ^{th} satisface de asemenea aceleaşi ecuaţii

$$\nabla^2\Phi^{th}+B_1^2\Phi^{th}=0 \qquad (5.21)$$

şi

$$\nabla^2\Phi^{th}+B_2^2\Phi^{th}=0. \qquad (5.22)$$

În consecinţă, există două soluţii reciproc independente pentru Φ^f şi Φ^{th}, pe care le vom nota cu X_1 şi X_2. Aici X_1 corespunde factorului B_1 şi X_2 factorului B_2. În baza condiţiilor de simetrie pentru fluxul

Scanned with OKEN Scanner

termic și rapid, soluțiile ecuațiilor (5.17) și (5.21) și acelea ale ecuațiilor (5.18) și (5.22) sînt în fiecare caz proporționale una cu alta

$$\Phi^f = AX_1 + CX_2 \tag{5.23}$$

$$\Phi^{th} = A'X_1 + C'X_2. \tag{5.24}$$

Există, de asemenea, o relație între constantele A și A' și C și C'. Aceasta depinde de legătura dintre fluxul rapid și termic, conform ecuațiilor (5.13) și (5.14). Egalînd $\nabla^2\Phi^{th}$ cu $-B^2\Phi^{th}$ din ecuațiile (5.21) și (5.22), rezultă din ecuația (5.14) că

$$\frac{\Phi^{th}}{\Phi^f} = \frac{\Sigma^f}{D^{th}B^2 + \Sigma^{th}} = \frac{D^f}{\tau D^{th}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{L^2} + B^2}. \tag{5.25}$$

În (5.25), B^2 poate fi considerat egal cu B_1^2 sau cu B_2^2, după cum avem de-a face cu funcția X_1 sau X_2. Deoarece constantele A și C pe de o parte și A' și C' pe de altă parte pot fi alese arbitrar, putem considera fie C și $C'=0$, fie A și $A'=0$.

În primul caz obținem din ecuațiile (5.23), (5.24) și (5.25)

$$\frac{\Phi^{th}}{\Phi^f} = \frac{A'}{A} = \frac{D^f}{\tau D^{th}} \frac{1}{\frac{1}{L^2} + B_1^2} = S_1 \tag{5.26}$$

și în al doilea caz

$$\frac{\Phi^{th}}{\Phi^f} = \frac{C'}{C} = \frac{D^f}{\tau D^{th}} \frac{1}{\frac{1}{L^2} + B_2^2} = S_2. \tag{5.27}$$

Mărimile S_1 și S_2, introduse aici, se numesc factori de cuplaj, deoarece ele sînt o măsură a interdependenței fluxurilor de neutroni Φ^{th} și Φ^f. Putem scrie ecuațiile (5.23) și (5.24) ca

$$\Phi^f = AX_1 + CX_2 \tag{5.28}$$

$$\Phi^{th} = AS_1X_1 + CS_2X_2. \tag{5.29}$$

Forma soluțiilor ecuațiilor de difuzie pentru zona activă a reactorului este determinată deci, cu excepția constantelor A și C, care trebuie stabilite din condițiile la limită între zona activă și reflector și în final din condițiile la limită pentru reflector. Înainte de a reveni la reflector, vom deduce ecuația de criticitate pentru reactorul cu reflector, înlocuind pe ∇^2 cu $-B^2$ din ecuația (5.15). Aceasta dă

$$[L^2\tau B^4 + (L^2+\tau)B^2 + 1]\Phi^f = k_\infty \Phi^f$$

Scanned with OKEN Scanner

şi poate fi scrisă sub forma

$$(L^2B^2+1)(\tau B^2+1)=k_\infty$$

sau

$$\frac{k_\infty}{(1+B^2L^2)\,(1+B^2\tau)}=1. \tag{5.30}$$

Ecuaţia (5.30) poate fi considerată ca o formă aproximativă a condiţiei de criticitate (2.119), dacă presupunem că L^2B^2 şi τB^2 sînt mici şi ecuaţia (5.30) se poate scrie sub forma

$$\frac{k_\infty}{M^2B^2+1}=1=k_{ef}. \tag{5.31}$$

B^2 este factorul geometric, din teoria monogrupală, iar $M^2=L^2+\tau$.

Rezultă că teoria monogrupală descrie pierderea de neutroni rapizi mai bine decît teoria bigrupală, în primul rînd, deoarece factorul de pierdere a fost $\exp(-B^2\tau)$ în timp ce aici, pierderea este dată numai de valoarea aproximativă $(1-B^2\tau)=1/(1+B^2\tau)$. Aceasta nu ne surprinde, deoarece în teoria monogrupală am tratat pierderea neutronilor rapizi prin modelul încetinirii continue, în timp ce acum am ignorat procesul de încetinire şi am exprimat difuzia neutronilor rapizi simplu, folosind valoarea τ. Eroarea ce apare pe această cale nu este însă prea mare, deoarece, în general, $B_2\tau$ este mult mai mic decît 1, astfel că aproximaţia apare ca fiind justificată.

Să considerăm acum difuzia ambelor grupe de neutroni în reflector. Ecuaţia de difuzie pentru reflector diferă de aceea pentru zona activă numai prin forma termenului sursă pentru neutronii rapizi. Dacă se notează termenii referitori la reflector cu prefixul r, atunci conform ecuaţiilor (5.13) şi (5.14) avem

$$^rD^f\nabla^{r2}\,{}^r\Phi^f-{}^r\Sigma^f\,{}^r\Phi^f=0 \tag{5.32}$$

$$^rD^{th}\nabla^2\,{}^r\Phi^{th}-{}^r\Sigma^{th}\,{}^r\Phi^{th}+{}^r\Sigma^f\,{}^r\Phi^f=0. \tag{5.33}$$

Putem transpune rezultatele calculelor precedente cu condiţia ca întotdeauna să egalăm factorul de multiplicare k_∞ cu zero. $^rB_1^2$ şi $^rB_2^2$ atunci devin în baza ecuaţiilor (5.19) şi (5,20)

$$^rB_1^2=-\frac{1}{^r\tau} \tag{5.34}$$

$$^rB_2^2=-\frac{1}{^rL^2} \tag{5.35}$$

Ambele soluţii în reflector sînt imaginare, în timp ce în zona activă una a fost imaginară şi cealaltă reală. Funcţiile

$$^r\Phi^f=FZ_1+GZ_2 \tag{5.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$ {}^{r}\Phi^{th} = F'Z_1 + G'Z_2 \tag{5.37} $$

corespund aici ecuațiilor (5.23) și (5.24). Din ecuațiile (5.34) și (5.35) obținem, conform ecuațiilor (5.26) și (5.27),

$$ \frac{{}^{r}\Phi^{th}}{{}^{r}\Phi^{f}} = \frac{F'}{F} = \frac{{}^{r}D^{f}}{\tau\,{}^{r}D^{th}} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{{}^{r}L^2} - \dfrac{1}{{}^{r}\tau}} = S_3 \tag{5.38} $$

$$ \frac{{}^{r}\Phi^{th}}{{}^{r}\Phi^{f}} = \frac{G'}{G} = \infty \quad \text{deoarece } G = 0 \tag{5.39} $$

și conform ecuațiilor (5.28) și (5.29) pentru reflector

$$ {}^{r}\Phi^{f} = FZ_1 \tag{5.40} $$

$$ {}^{r}\Phi^{th} = S_3 FZ_1 + G'Z_2. \tag{5.41} $$

Rămîn să fie determinate numai constantele A, C, F și G'. Ele sînt determinate de condițiile la limită pentru fluxurile din zona activă și acelea din reflector. Ca și în cazul calculului pentru reflector în baza teoriei monogrupale (ecuațiile (5.1) și (5.2)), cerem din nou continuitatea fluxurilor la suprafața de separare între reflector și zona activă și continuitatea densității curentului de difuzie. Aceasta înseamnă în acest caz

$$ \left.\begin{aligned} AX_1 + CX_2 - FZ_1 &= 0 \\ S_1AX_1 + S_2CX_2 - S_3FZ_1 - G'Z_2 &= 0 \\ D^{f}AX_1' + D^{f}CX_2' - {}^{r}D^{f}FZ_1' &= 0 \\ D^{th}S_1AX_1' + D^{th}S_2CX_2' - {}^{r}D^{th}S_3FZ_1' - {}^{r}D^{th}G'Z_2' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.42} $$

Avem patru ecuații omogene pentru necunoscutele A, C, F și G'. Coordonatele geometrice ale suprafeței de separare între zona activă și reflector urmează a fi incluse în funcțiile X_1, X_2, Z_1, Z_2. Funcțiile marcate cu „prim", se referă la gradientul evaluat la suprafața de separare. Ecuația (5.42) poate avea sens numai dacă determinantul coeficienților este zero

$$ \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & -Z_1 & 0 \\ S_1X_1 & S_2X_2 & -S_3Z_1 & -Z_2 \\ D^{f}X_1' & D^{f}X_2' & -{}^{r}G^{f}Z_1' & 0 \\ D^{th}S_1X_1' & D^{th}S_2X_2' & -{}^{r}D^{th}S_3Z_1' & -{}^{r}D^{th}Z_2' \end{vmatrix} = 0. \tag{5.43} $$

Termenii acestui determinant conțin numai constanta de material și raza sau respectiv dimensiunile zonei active. Astfel, ecuația (5.43)

Scanned with OKEN Scanner

este o ecuaţie utilă pentru determinarea dimensiunilor zonei active. Pare surprinzător că condiţia la limită ca fluxurile de neutroni să tindă la zero la marginea reflectorului nu joacă nici un rol la determinarea dimensiunilor zonei active. În realitate, aceste condiţii la limită sînt legate de ecuaţia critică (5.30), prin faptul că factorul de material a fost dat ca o proprietate de material. În ecuaţia (5.43) acest factor de material determină geometria reactorului, precizînd unde cele două fluxuri ${}^{r}\Phi^{f}$ şi ${}^{r}\Phi^{th}$ tind la zero. Astfel dimensiunile întregului reactor sînt, de asemenea, date.

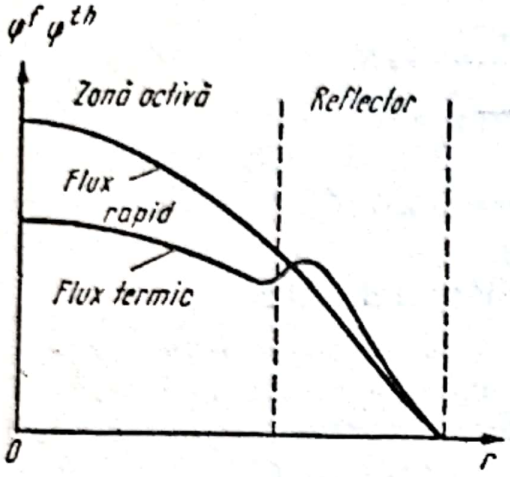


Fig. 5.2. Distribuţia spaţială a fluxului termic şi rapid într-un reactor cu reflector. Liniile întrerupte reprezintă suprafeţele de separare ale reactorului.

Dacă dimensiunile zonei active, date implicit prin ecuaţia (5.43) sînt, determinate, atunci se pot calcula trei din constantele A, C, F şi G' care apar în ecuaţia (5.42); cea de-a patra rămîne nedeterminată, fiind amplitudinea unuia dintre fluxuri, amplitudinea fluxului termic. Fig. 5.2 arată distribuţia fluxului termic şi rapid de neutroni. Se poate vedea aplatizarea fluxului termic în zona activă în comparaţie cu reactorul fără reflector. Mai mult, este de remarcat că fluxul termic în reflector are un maxim. Acesta apare datorită faptului că de ambele părţi ale suprafeţei de separare între zona activă şi reflector, neutronii rapizi sînt încetiniţi şi devin termici, dar numai în zona activă ei sînt puternic absorbiţi.

Se poate extinde calculul într-un mod similar, cu mai mult de două grupe de neutroni. Pentru aceasta e mai convenabil să se utilizeze calculul matriceal pentru scrierea ecuaţiei de încetinire, dar nu vom trata acest caz aici.

2. Bara de control centrală în teoria bigrupală

În general, calculul efectului barelor de control este posibil, dar este foarte complicat. Dificultăţile sînt în parte aceleaşi ca cele menţionate în calculul reflectorului prin teoria multigrupală. În plus, de obicei, barele de control nu sînt plasate în centrul reactorului. Aceasta impune

Scanned with OKEN Scanner

să se recurgă la funcţii, care depind de unghiul azimutal, fără simetrie de rotaţie. De aceea, este mai convenabil să se folosească dezvoltări Fourier, ale căror elemente sînt funcţii Bessel. Nu vom folosi acest mod aici. Cu toate acestea, pentru a arăta, în principiu, modul în care se tratează barele de control, vom considera un caz simplificat: cazul barei plasată pe axul unui reactor cilindric. Aplicăm pentru acest caz teoria bigrupală. Este adevărat că efectul unei bare de control centrale se poate calcula şi cu ajutorul teoriei monogrupale, dar rezultatul are o corespondenţă atît de redusă cu realitatea, încît un astfel de calcul nu are nici o valoare.

Să presupunem că bara centrală de control este complet introdusă în zona activă, astfel că distribuţia normală a fluxului în direcţia axială a zonei active nu este perturbată de bară. El păstrează forma dată în ecuaţia (2.134). Acest termen axial este, cu excepţia amplitudinii Z_0, acelaşi atît pentru fluxul termic, cît şi pentru cel rapid. Pentru calculele ce urmează, considerăm funcţia ce descrie fluxul ca şi pînă acum separabilă şi ne ocupăm numai de partea radială din (2.133)

$$\nabla^2 R(r)+C^2R=0. \tag{5.44}$$

Din nou, ca şi în calculul reflectorului, în ecuaţiile (5.17), (5.18) şi (5.21), (5.22), atît fluxul de neutroni rapizi cît şi cel de neutroni termici satisface ecuaţia (5.44) dacă C^2 are una din următoarele două valori

$$C_1^2=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}-\left\{\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}\right)^2+\frac{4(k_\infty-1)}{L^2\tau}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \tag{5.45}$$

$$C_2^2=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}+\left\{\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{L^2}\right)^2+\frac{4(k_\infty-1)}{L^2\tau}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \tag{5.46}$$

conform ecuaţiilor (5.19) şi (5.20).

Cele două soluţii X_1 şi X_2 ale ecuaţiei de difuzie în zona activă (ecuaţiile (5.23) şi (5.24)) sînt acum, pentru cazul simetriei de rotaţie,

$$X_1=J_0(C_1r)+FY_0(C_1r) \tag{5.47}$$

$$X_2=EI_0(iC_2r)+K_0(iC_2r). \tag{5.48}$$

Constantele E şi F sînt arbitrare şi urmează a fi determinate. i este $\sqrt{-1}$. Factorul C_2 ca şi factorul B_2 din paragraful 5.1 este imaginar, astfel că argumentele tuturor funcţiilor cilindrice în ecuaţiile (5.47) şi (5.48) sînt reale. Funcţiile Y_0 şi K_0 sînt infinite la $r=0$ şi deci nu sînt aplicabile în calculul precedent. Trebuie îndeplinită condiţia la limită,

Scanned with OKEN Scanner

că în regiunea barei de control fluxul termic tinde la zero. Pentru aceasta trebuie să adunăm aceste funcţii.

La marginea zonei active $r=r_1$, atît fluxul de neutroni rapizi cît şi cel de neutroni termici trebuie să tindă la zero. Aceste condiţii furnizează constantele E şi F şi din ecuaţiile (5.47) şi (5.48) obţinem

$$X_1=J_0(C_1r)-\frac{J_0(C_1r_1)}{Y_0(C_1r_1)}\cdot Y_0(C_1r) \tag{5.49}$$

$$X_2=K_0(iC_2r)-\frac{K_0(iC_2r_1)}{I_0(iC_2r_1)}I_0(iC_2r). \tag{5.50}$$

Scopul acestui calcul este de a determina schimbarea factorului de material C_1, în ecuaţia (2.133), schimbare produsă prin introducerea unei bare de control. Considerăm schimbarea într-un punct, prin introducerea unei constante în calcul şi apoi o deducem dintr-o condiţie la limită pentru bara de control.

Să presupunem că factorul C_1 se schimbă cu cantitatea mică δ, prin introducerea barei de control. Scriem

$$C_1=C_{10}+\delta \tag{5.51}$$

în care C_{10} este factorul de material al reactorului fără bara de control. Cu această ipoteză, funcţia $J_0(C_1r_1)$ devine

$$J_0(C_1r_1)=J_0(C_{10}r_1+\delta\cdot r_1)=J_0(C_{10}r_1)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(C_{10}r_1)}J_0(C_{10}r_1)\,\delta\cdot r_1=$$

$$=J_0(C_{10}r_1)-J_1(C_{10}r_1)\,\delta\cdot r_1 \tag{5.52}$$

în care $J_1(C_{10}r_1)$ este funcţia Bessel de ordinul întîi, considerată în punctul $C_{10}r_1$. În acest punct, $J(C_{10}r_1)$ este egal cu zero, deoarece C_{10} este presupus a fi factorul de material al reactorului fără bara de control. În punctul în care funcţia J_0 este zero, funcţia J_1 are valoarea $J_1(C_{10}r_1)=$ $=0{,}519$. Atunci

$$J_0(C_1r_1)=-0{,}519\ \delta\cdot r_1. \tag{5.53}$$

Funcţia Neumann Y_0 rămîne aproximativ constantă în punctul $C_{10}r_1$

$$Y_0(C_1r_1)=Y_0(C_{10}r_1)=0{,}510. \tag{5.54}$$

Înlocuind ecuaţiile (5.53) şi (5.54) în ecuaţia (5.49), avem

$$X_1=J_0(C_1r)+\frac{0{,}519}{0{,}510}\,\delta\cdot r_1Y_0(C_1r)$$

sau cu ajutorul ecuaţiei (2.137)

$$X_1=J_0(C_1r)+\frac{2{,}44\,\delta}{C_{10}}Y_0(C_1r). \tag{5.55}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ne interesează numai valorile mici ale lui r, adică în aria apropiată barei de control, funcţia X_2 este aproape independentă de condiţiile la limită la suprafaţa zonei active, deoarece al doilea termen din ecuaţia (5.50) devine foarte mic în comparaţie cu primul. Ecuaţia (5.50) poate fi deci scrisă pentru valori mici ale lui r

$$X_2 = K_0(iC_2r). \tag{5.56}$$

Combinînd soluţiile X_1 şi X_2 cu soluţia generală, obţinem, ca în ecuaţia (5.28) şi (5.29) pentru partea radială a fluxului termic şi rapid în zona activă, expresiile

$$R^f = X_1 + AX_2 = J_0(C_1r) + \frac{2 \cdot 44\,\delta}{C_{10}} Y_0(C_1r) + AK_0(iC_2r) \tag{5.57}$$

$$R^{th} = S_1X_1 + S_2AX_2 = S_1\left[J_0(C_1r) + \frac{2 \cdot 44\,\delta}{C_{10}} Y_0(C_1r)\right] + S_2AK_0(iC_2r). \tag{5.58}$$

Deoarece nu mai prezintă interes, am omis amplitudinea funcţiei X_1. Factorii de cuplaj S_1 şi S_2 corespunzători ecuaţiilor (5.26) şi (5.27) sînt

$$S_1 = \frac{D^f}{\tau D^{th}} \frac{1}{\frac{1}{L^2} + C_1^2} \tag{5.59}$$

$$S_2 = \frac{D^f}{\tau D^{th}} \frac{1}{\frac{1}{L^2} + C_2^2}. \tag{5.60}$$

Obţinem factorii geometrici C_1 şi C_2 din ecuaţiile (5.45) şi (5.46) presupunînd în plus că al doilea termen de sub radical este în fiecare caz mic în comparaţie cu primul. Atunci avem

$$C_1^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2 + \tau}$$

$$C_2^2 = -\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right).$$

Astfel, factorii de cuplaj devin

$$S_1 = \frac{D^f}{D^{th}} \frac{L^2}{\tau} \tag{5.61}$$

$$S_2 = -\frac{D^f}{D^{th}}. \tag{5.62}$$

Au rămas de determinat mărimile A şi δ, din cele două condiţii la limită pentru bara de control, pentru fluxul termic şi rapid.

Scanned with OKEN Scanner

Materialul barelor de control, de exemplu cadmiul sau oţelul borat, are proprietatea de a absorbi puternic neutronii termici, în timp ce neutronii rapizi sînt capturaţi într-o măsură neglijabilă. Vom alege deci condiţiile la limită pe suprafaţa barei de control astfel ca fluxul de neutroni rapizi în zona activă să nu fie afectat de prezenţa barei. Deoarece bara este de fapt situată pe axa centrală a reactorului

$$\frac{dR^f(r'')}{dr}=0 \tag{5.63}$$

în care r'' este raza barei de control. Neutronii termici vor fi absorbiţi de bara de control în aşa măsură, încît putem presupune că fluxul termic scade la zero la suprafaţa barei. Atunci

$$R^{th}(r'')=0. \tag{5.64}$$

(Strict vorbind, nu putem egala fluxul la suprafaţa barei exact cu zero, ci numai în punctul $r''—d$, în care d este lungimea caracteristică de extrapolare a materialului zonei active, conform ecuaţiei (5.1). Din ecuaţiile (5.57) şi (5.63) rezultă că

$$0=C_1J_1(C_1r'')+\frac{2{,}44\,\delta}{C_{10}}\frac{d}{dr}Y_0(C_1r'')+A\frac{d}{dr}K_0(iC_2r) \tag{5.65}$$

La valori mici ale lui r, se poate folosi pentru $K_0(iC_2r)$ expresia aproximativă

$$K_0(iC_2r)=0{,}116+\ln\frac{1}{iC_2R} \tag{5.66}$$

şi pentru $Y_0(C_1r)$

$$Y_0(C_1r)=-\frac{2}{\pi}\left(0{,}116+\ln\frac{1}{C_1r}\right). \tag{5.67}$$

În comparaţie cu ceilalţi termeni din ecuaţia (5.65), funcţia $J_1(C_1r'')$ poate fi neglijată.

Cu $\frac{d}{dr}K_0(iC_2r'')=\frac{1}{r''}$ şi $\frac{d}{dr}Y_0(Cr'')=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{r''}$ din ecuaţiile (5.66) şi (5.67) obţinem din ecuaţia (5.65)

$$A=\frac{2}{\pi}2{,}44\frac{\delta}{C_{10}}. \tag{5.68}$$

A rămas de evaluat modificarea factorului C_1, cu ajutorul condiţiei la limită dată de ecuaţia (5.64). Din ecuaţia (5.58), luînd în consideraţie ecuaţiile (5.61), (5.62) şi (5.68), rezultă că

$$R^{th}=S_1\left[J_0(C_1r)+2{,}44\frac{\delta}{C_{10}}\left(Y_0(C_1r)-\frac{2}{\pi}\frac{\tau}{L^2}K_0(iC_2r)\right)\right]. \tag{5.69}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece avem întotdeauna de-a face cu valori mici ale lui r, putem din nou să folosim expresiile aproximative date de egalităţile (5.66) şi (5.67) şi, de asemenea, să egalăm funcţia $J_0(C_1 r)$ cu unitatea. Cu condiţia la limită dată de ecuaţia (5.64), obţinem

$$0 = 1 - \frac{2}{\pi} 2{,}44 \frac{\delta}{C_{10}} \left[0{,}116 + \ln \frac{1}{C_1 r''} + \frac{\tau}{L^2} \left(0{,}116 + \ln \frac{1}{iC_2 r''} \right) \right]$$

şi, în final, din aceasta valoarea lui δ, care a fost căutată

$$\frac{\delta}{C_{10}} = \frac{\pi}{4{,}88} \frac{1}{\left[0{,}116 + \ln \frac{1}{C_1 r''} + \frac{\tau}{L^2} \left(0{,}116 + \ln \frac{1}{iC_2 r''} \right) \right]}. \qquad (5.70)$$

Modificarea δ/C_{10} a factorului de material C_1 rămîne acum să fie transformată în modificarea corespunzătoare a factorului de multiplicare k_∞, folosind ecuaţia critică (2.119).

Ecuaţia (5.70) arată că schimbarea factorului de material în cazul unei bare de control nu prea subţiri depinde relativ puţin de diametrul barei. Hotărîtor pentru eficacitate este absorbţia completă a fluxului de neutroni pe axa reactorului. În consecinţă, creşterea eficacităţii barei nu se poate face nici prin îngroşarea barei, nici prin creşterea suprafeţei sale prin subdivizare. Trebuie avut în vedere ca barele de control — de obicei, sînt folosite cîteva, — să aibă o anumită distanţă între ele. Totuşi, dacă ele sînt plasate prea departe de axa zonei active, eficienţa lor este redusă datorită faptului că fluxul de neutroni este mai mic. Există deci o poziţie optimă a barelor de control în reactor. Mai trebuie arătat faptul că fluxul termic deşi scade puternic în imediata vecinătate a fiecărei bare, creşte apoi la valoarea sa normală într-o regiune mai îndepărtată. Din această cauză, influenţa reciprocă a barelor creşte efectul tuturor celorlalte bare.

Din ultima remarcă se poate vedea că pentru calculul eficacităţii mai multor bare de control plasate excentric în reactor nu e suficient să se calculeze eficacitatea uneia dintre barele excentrice şi să se multiplice rezultatul cu numărul barelor pentru a obţine eficacitatea totală a tuturor barelor. Trebuie, de asemenea, să se ia în consideraţie influenţa reciprocă (cuplajul) dintre bare.

După cum s-a arătat la început, astfel de calcule sînt foarte detaliate, şi se poate vedea cît de mult a fost simplificată problema pentru a o putea aborda. Să mai arătăm o imprecizie care este prezentă în calculele

Scanned with OKEN Scanner

noastre. Am acceptat întotdeauna că calculul a fost bazat pe teoria difuziei. De fapt aceasta este posibil numai dacă diametrul barei este mare în comparație cu drumul liber mijlociu al neutronilor în materialul zonei active. De altminteri, pentru neutroni trebuie să fie folosită teoria transportului care nu a fost încă tratată.

Din fericire, în general nu este necesar să se aplice teoria complicată a barelor de control, deoarece în cele mai multe cazuri este vorba doar de evaluarea unui maxim de eficiență.

Reacț
portarea
de neutr
depășește
de neutr
Reacția î
constant,

Fiecar
sa în mon
duce, poat
tronul est
mic. Timp
moderator
de încetin
de viață c
aproximat

Din fer
neral com
neutroni (a
nabil este

Media a
de 99%) ș
ceea ce fac

Ne prop
care sînt a
din fragmer
Nucleele ac

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA A DOUA

Dinamica reactorilor nucleari

Capitolul VI

COMPORTAREA DINAMICĂ A REACTORULUI

1. Dinamica reacţiei în lanţ

Reacţia în lanţ este examinată în cele ce urmează în raport cu comportarea sa în timp. Din ecuaţia (2.118), cap. II, s-a văzut că numărul de neutroni creşte progresiv, dacă factorul de multiplicare efectivă k_{ef} depăşeşte valoarea 1 prin ciclul reacţiei în lanţ. Din contră, numărul de neutroni descreşte cînd această valoare este mai mică decît 1. Reacţia în lanţ este staţionară, adică numărul de neutroni rămîne constant, numai cînd factorul de multiplicare efectivă este egal cu 1.

Fiecare neutron are un anumit timp de viaţă începînd de la formarea sa în momentul fisiunii uraniului şi terminînd cînd este absorbit şi produce, poate, o nouă fisiune. Acest timp este egal cu timpul în care neutronul este încetinit de către moderator şi timpul petrecut ca neutron termic. Timpul de viaţă al neutronului este dependent de concentraţia de moderator din reactor şi este de aproximativ 10^{-3}—10^{-4} s, din care timpul de încetinire propriu-zis este aproximativ o zecime a timpului total de viaţă ca neutron termic şi timpul pentru procesul de fisiune este de aproximativ 10^{-17} s.

Din fericire aceste perioade de timp relativ scurte nu decid în general comportarea dinamică a unui reactor, deoarece o parte dintre neutroni (aproximativ 0,3—0,7% în funcţie de tipul de material fisionabil este formată din aşa numiţii neutroni întîrziaţi.

Media aritmetică a timpului de viaţă a neutronilor prompţi (mai mult de 99%) şi acelor cîţiva neutroni întîrziaţi este de aproximativ 10^{-1}s, ceea ce face posibil din punct de vedere tehnic controlul reactorului.

Ne propunem să discutăm în cele ce urmează neutronii întîrziaţi care sînt atît de importanţi pentru reglarea reactorilor. Ei sînt emişi din fragmentele de fisiune, mult mai tîrziu decît evenimentul fisiunii. Nucleele acestor fragmente de fisiune se află în stări excitate înalte,

Scanned with OKEN Scanner

pe seama excesului lor de energie. Această energie de excitație ar fi suficientă pentru emiterea unui neutron din nucleu, dacă nu ar trebui respectate anumite legi de conservare. Aceste legi ce sînt explicate pe baza mecanicii cuantice interzic emisia directă a neutronului. Această restricție este evitată prin emisia unuia sau a mai multor electroni (radiații β), după aceea, poate fi emis și un neutron. Timpul de așteptare pentru emisia unui electron, sau timpul de înjumătățire pentru dezintegrare în fiecare caz, corespunde deci timpului de întîrziere a unui neutron.

În tabelele de la p. 150 și 151 este arătată proporția de neutroni întîrziați, cu timpii lor de întîrziere și constantele de dezintegrare aferente, pentru uraniu-235, uraniu-233 și plutoniu-239:.

În afară de grupele de neutroni citate, există, de asemenea, alte grupe de neutroni întîrziați (cu timpi de dezintegrare mai scurți sau mai lungi) care datorită numărului lor mic sînt nedetectabili deocamdată experimental și prin urmare nu prezintă interes tehnic.

În reactorii cu apă grea ca moderator apar de asemenea și alte grupe de neutroni întîrziați. Există fotoneutroni, produși datorită interacției radiațiilor gama ale produselor de fisiune cu nucleele de deuteriu.

Subliniem din nou că media aritmetică a timpului de viață a tuturor neutronilor din reactor este de aproximativ 0,1 s, din care timpul de încetinire și timpul de viață ca neutroni termici este practic neglijabil. Din numeroase motive, în particular și acelea implicînd modificări lente în reactor, este prin urmare suficient să se descrie comportarea în timp ca o ecuație diferențială cu un singur grup de neutroni avînd un timp de viață de 0,1 s. Aceste considerente se aplică atît neutronilor termici cît și celor rapizi.

2. Comportarea dinamică a reactorilor în ipoteza monogrupală

Vom descrie procesele dinamice de bază ale reacției în lanț cu ajutorul unei reprezentări simple folosind un singur grup de neutroni.

Fie Φ fluxul de neutroni în reactor; fie secțiunea macroscopică de absorbție Σ_a; atunci numărul de neutroni absorbiți pe cm^3 și secundă este egal cu $\Phi \Sigma_a$.

Dacă reactorul lucrează cu o constantă de multiplicare k_{ef}, atunci modificarea densității de neutroni este

$$\frac{dn}{dt} = (k_{ef} - 1)\,\Sigma_a \Phi. \qquad (6.1)$$

Deoarece este de dorit ca partea stîngă să se refere la fluxul de neutroni, vom multiplica întreaga ecuație cu viteza v a neutronului.

Scanned with OKEN Scanner

Viteza neutronului, v, poate fi inclusă în diferenţială deoarece ea nu depinde de timp. Rezultatul, pentru variaţia fluxului de neutroni este atunci

$$\frac{d\Phi}{dt} = (k_{ef}-1)\,\Sigma_a v\Phi. \tag{6.2}$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale simple este

$$\Phi = \Phi_0 \exp[(k_{ef}-1)\,\Sigma_a v t]. \tag{6.3}$$

Aici am presupus că la timpul $t=0$ fluxul de neutroni are valoarea Φ_0. Acum introducem următoarea constantă de timp

$$\Sigma_a v = \frac{1}{\bar{t}}. \tag{6.4}$$

Prin timpul $\bar{t}$ se înţelege timpul mediu de absorbţie al neutronului. Strict vorbind ar trebui de asemenea să adăugăm timpul de încetinire care este însă atît de mic încît îl vom neglija, în special cînd avem de-a face cu un singur grup de neutroni. Semnificaţia factorului de multiplicare k_{ef} este explicată detaliat în cap. I. Acum introducem reactivitatea δk

$$\delta k = (k_{ef}-1) \tag{6.5}$$

care ne dă legea de creştere a fluxului de neutroni în forma cea mai simplă

$$\Phi = \Phi_0 \exp(\delta k\,\Sigma_a v t) = \Phi_0 \exp\left(k\delta \frac{t}{\bar{t}}\right). \tag{6.6}$$

Această formulă simplă relevă foarte clar comportarea în timp a reactorilor aşa cum este arătat în următoarele exemple numerice. Presupunînd că $\delta k = 0{,}001$ adică în fiecare ciclu al reacţiei în lanţ se formează un neutron suplimentar pentru o mie de neutroni, atunci cu un timp de viaţă mediu $\bar{t} = 0{,}1$ s, după $t = 100$ s fluxul de neutroni $\Phi = e\Phi_0 \sim 2{,}7\ \Phi_0$; după $t = 230$ s fluxul de neutroni a crescut aproape de 10 ori. Cu astfel de perioade de timp este tehnic posibil să fie controlat reactorul. Dacă, pe de altă parte, presupunem că $\delta k = -0{,}001$ atunci rezultă că după 230 s fluxul de neutroni a scăzut de aproximativ 10 ori. Dacă creştem reactivitatea δk la 0,01 atunci în numai 20 de secunde apare o creştere alarmantă a fluxului de neutroni. Aceste exemple dau desigur, numai o aproximaţie a ceea ce se întîmplă în realitate. O reprezentare mai corectă este obţinută dacă se consideră două sau mai multe grupe de neutroni.

Scanned with OKEN Scanner

3. Comportarea dinamică a reactorilor în ipoteza bigrupală

Vom discuta acum modelul în care neutronii prezenţi în reactor sînt împărţiţi în două grupe, neutroni prompţi şi neutroni întîrziaţi. Fie β fracţiunea de neutroni întîrziaţi şi τ timpul lor mediu de viaţă. Dacă concentraţia neutronilor întîrziaţi este N, se vor forma λN neutroni întîrziaţi pe cm^3 şi s (λ este constanta de dezintegrare corespunzătoare pentru neutronii întîrziaţi). Trebuie menţionat că numărul N nu se referă numai la numărul de neutroni întîrziaţi ci de asemenea la toţi emiţătorii de neutroni întîrziaţi încă conţinuţi (latent) în produsele de fisiune.

Constanta de multiplicare k_∞ (pentru un mediu infinit, adică neglijînd neutronii care, practic, părăsesc reactorul) este atunci micşorată cu $k_\infty\beta$, adică la $k_\infty(1-\beta)$. În mod corespunzător k_{ef} se micşorează de asemenea cu acelaşi factor. Proporţia de neutroni întîrziaţi este diferită pentru cei 3 izotopi fisionabili şi este arătată în tabelul următor:

U^{233}	$\beta=0{,}0027$
U^{235}	$\beta=0{,}0064$
Pu^{239}	$\beta=0{,}0021$

Deoarece neutronii întîrziaţi ca şi neutronii prompţi sînt eliberaţi ca neutroni rapizi, ei trebuie să fie încetiniţi înainte de a deveni neutroni termici efectivi. În acest proces, o anumită proporţie este pierdută prin absorbţia de rezonanţă în mediul înconjurător şi o altă fracţiune se pierde din reactor sub formă de neutroni rapizi sau termici.

Astfel, sursa de neutroni întîrziaţi este numai

$$Q_N=\lambda N P_f P_{th} p \qquad (6.7)$$

unde: P_f — factorul de scăpare a neutronilor rapizi, P_{th} — factorul de scăpare a neutronilor termici, p — probabilitatea de evitare a capturii de rezonanţă.

S-a presupus că neutronii întîrziaţi sînt produşi cu aceeaşi energie ca şi neutronii prompţi, ceea ce de fapt nu se întîmplă în realitate. Neutronii prompţi sînt produşi cu o energie medie de 2 MeV şi cei întîrziaţi cu energie între 0,5 şi 1 MeV. Cu toate acestea pentru procesul de încetinire putem aplica aceeaşi probabilitate p de evitare a capturii de rezonanţă şi acelaşi factor de scăpare P_f atît pentru neutronii prompţi

Scanned with OKEN Scanner

cît şi pentru cei întîrziaţi, deoarece încetinirea neutronilor în regiunea de energie mare apare foarte rapid şi pentru acest motiv energiile diferite ale neutronilor duc la aceeaşi pierdere prin captura de rezonanţă şi scurgerea de neutroni. Factorul de scăpare pentru neutronii termici este desigur acelaşi pentru ambele tipuri de neutroni.

Să discutăm acum variaţia în timp a populaţiei de neutroni întîrziaţi. Cu un flux de neutroni dat Φ, numărul de neutroni care sînt absorbiţi pe cm^3 şi secundă este egal cu $\Sigma_a\Phi$, din care f sînt absorbiţi în combustibil. Ca un rezultat al absorbţiei acestor $f\Sigma_a\Phi$ neutroni pe cm^3 şi secundă în combustibil se formează $\eta f\Sigma_a\Phi$ neutroni rapizi care se multiplică şi cu factorul de fisiune la neutroni rapizi ε. Din $\varepsilon\eta f\Sigma_a\Phi$ neutroni termici pe cm^3 şi secundă produşi prin absorbţie şi respectiv fisiune o fracţiune β se produce ca neutroni latenţi. (Vezi formula celor patru factori din cap. II). Pe de altă parte, λN neutroni se pierd conform legii de dezintegrare radioactivă în fiecare cm^3 şi secundă. Bilanţul total pentru viteza de schimbare a concentraţiei emiţătorilor de neutroni pe cm^3 şi secundă este dată corespunzător de ecuaţia

$$\frac{dN}{dt} = \eta\varepsilon f\Sigma_a\Phi\beta - \lambda N \tag{6.8}$$

Conform formulei celor patru factori (vezi cap. II) $\eta\varepsilon f = k_\infty/p$ astfel că ecuaţia (6.8) poate fi simplificată la

$$\frac{dN}{dt} = \frac{k_\infty}{p}\,\Sigma_a\Phi\beta - \lambda N. \tag{6.9}$$

Înainte de a include această ecuaţie diferenţială în ecuaţia bilanţului de neutroni, o integrăm

$$N = N_0\exp(-\lambda t) + \int_0^t dt_1\,\exp\{-\lambda(t-t_1)\}\cdot\frac{k_\infty}{p}\,\Sigma_a\cdot\Phi\cdot\beta \tag{6.10}$$

şi verificăm această soluţie prin diferenţiere şi înlocuire în (6.9).

Pentru a obţine cea mai simplă formă posibilă pentru ecuaţia finală, expresia (6.10) o vom modifica mai departe prin integrare prin părţi. Pentru acest scop folosim formula de integrare prin părţi

$$\int_0^t uv'\,dt_1 = u(t)v(t) - u(0)v(0) - \int_0^t vu'\,dt,$$

a cărei valabilitate poate fi uşor verificată prin diferenţiere.

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind

$$u=\frac{\beta\Sigma_a k_\infty}{p}\Phi(t_1),\quad v'=\exp[-\lambda(t-t_1)]$$

şi

$$u'=\frac{\beta\Sigma_a k_\infty}{p}\frac{d\Phi(t_1)}{dt},\qquad v=\frac{1}{\lambda}\exp[-\lambda(t-t_1)]$$

în final obţinem

$$N=N_0\exp(-\lambda t)+\frac{\beta k_\infty\Sigma_a}{p\cdot\lambda}\Phi(t)-\frac{\beta k_\infty\Sigma_a}{p\cdot\lambda}\Phi_0\cdot\exp(-\lambda t)-$$

$$-\frac{\beta k_\infty\Sigma_a}{p\cdot\lambda}\int_0^t dt_1\exp\{-\lambda(t-t_1)\}\Phi'(t_1). \tag{6.11}$$

(Primul şi al doilea termen se anulează reciproc în conformitate cu ecuaţia (6.9), deoarece Φ_0 şi N_0 se referă la starea staţionară). Am presupus că la $t=0$ există un flux staţionar de neutroni Φ_0 şi o concentraţie staţionară N_0 a neutronilor întîrziaţi.

Această ipoteză nu se limitează la sistemul nostru de ecuaţii pentru care putem trata întotdeauna fiecare proces temporal ca o continuare a unei stări staţionare.

Introducem următoarea notaţie

$$\beta\exp\{-\lambda(t-t_1)\}=D(t-t_1) \tag{6.12}$$

şi obţinem pentru concentraţia neutronilor întîrziaţi expresia

$$N(t)=\frac{k_\infty\Sigma_a}{p\lambda}\left\{\beta\Phi(t)-\int_0^t dt_1 D(t-t_1)\Phi'(t_1)\right\}. \tag{6.13}$$

Prin considerarea neutronilor întîrziaţi obţinem pentru variaţia fluxului de neutroni (vezi ecuaţia (6.2))

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{d\Phi}{dt}=[k_{ef}(1-\beta)-1]\Sigma_a\Phi+Q_N. \tag{6.14}$$

Producţia totală de neutroni, dată cu ajutorul factorului de multiplicare efectivă k_{ef}, scade cu factorul $(1-\beta)$. Neutronii întîrziaţi sînt descrişi cu ajutorul termenului de sursă (vezi ecuaţia (6.7)). Dacă înlocuim N (concentraţia neutronilor întîrziaţi) cu expresia dată de ecuaţia (6.13), obţinem

$$\frac{1}{v}\frac{d\Phi}{dt}=(k_{ef}-1)\Sigma_a\Phi-k_{ef}\beta\Sigma_a\Phi+k_{ef}\beta\Sigma_a\Phi-$$

$$-k_{ef}\Sigma_a\int_0^t dt_1 D(t-t_1)\Phi'(t_1). \tag{6.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerînd ecuaţiile (6.4) şi (6.5) obţinem ca ecuaţie finală pentru comportarea dinamică a unui reactor

$$\bar{l}\frac{d\Phi}{dt}=\delta k\cdot\Phi-k_{ef}\int_0^{t_0}dt_1 D(t-t_1)\Phi'(t_1). \qquad (6.16)$$

Integrala este desigur o corecţie a reactivităţii δk care apare în primul termen.

Vedem că a doua parte reprezintă sub forma unei integrale o contribuţie negativă la viteza de variaţie a fluxului de neutroni, cît timp fluxul de neutroni creşte, adică derivata lui Φ este pozitivă. Dacă, pe de altă parte, fluxul de neutroni scade (adică derivata de sub semnul integralei devine negativă), atunci a doua parte a ecuaţiei reprezintă o contribuţie pozitivă, scăderea fluxului de neutroni este încetinită. Aceasta înseamnă clar că neutronii întîrziaţi se opun oricărei schimbări a fluxului de neutroni şi fiecare schimbare a fluxului de neutroni poate apare numai cu o întîrziere faţă de fiecare schimbare de reactivitate.

Acest efect de întîrziere este îndeaproape legat de raportul dintre reactivitatea δk şi fracţiunea β a neutronilor întîrziaţi. Dacă excesul de reactivitate δk a neutronilor prompţi depăşeşte fracţiunea β a neutronilor întîrziaţi, există o creştere exponenţială a fluxului de neutroni.

Acest eveniment apare într-un timp foarte scurt astfel că pentru descrierea sa în ecuaţia (6.16) putem dezvolta funcţia exponenţială în serie şi să ne oprim după primul termen, deoarece, pentru perioadele de timp considerate, contribuţia dată de al doilea termen este mică în comparaţie cu primul termen

$$\exp[-\lambda(t-t_1)]=1-\lambda(t-t_1)+\ldots \qquad (6.17)$$

Dacă presupunem $\lambda=0{,}1\ s^{-1}$, atunci pentru $t<0{,}1$ s, al doilea termen al seriei este numai o corecţie de un procent. Folosind ecuaţiile (6.12) şi (6.17) scriem prin urmare pentru integrala din ecuaţia (6.16)

$$k_{ef}\int_0^t dt_1 D(t-t_1)\Phi'(t_1)=k_{ef}\cdot\beta\cdot\int_0^t dt_1\frac{d\Phi}{dt_1}=\beta k_{ef}(\Phi(t)-\Phi_0) \qquad (6.18)$$

şi pentru ecuaţia (6.16)

$$\bar{l}\frac{d\Phi}{dt}=(\delta k-\beta k_{ef})\Phi+\beta k_{ef}\Phi_0. \qquad (6.19)$$

I. Considerăm primul din cazurile posibile, cînd excesul de reactivitate este egal cu βk_{ef}. Aceasta înseamnă, evident, că fracţiunea de neu-

troni în exces formată pe ciclu este egală cu fracţiunea de neutroni întîrziaţi. Soluţia ecuaţiei diferenţiale (6.19) este atunci

$$\Phi=\Phi_0\left(1+\frac{\beta k_{ef}}{\bar{l}}t\right). \qquad (6.20)$$

Pentru a estima ordinul de mărime al creşterii fluxului de neutroni în acest caz să considerăm exemplul următor

$$\beta=0{,}01,\ k_{ef}\approx 1 \text{ şi } \bar{l}=0{,}001 \text{ s}.$$

După 0,1 s fluxul s-a dublat, după o secundă el a crescut de 11 ori.

II. Dacă excesul de reactivitate δk depăşeşte βk_{ef}, atunci situaţia devine chiar mai critică. Soluţia ecuaţiei diferenţiale (6.19) este

$$\Phi=\Phi_0\left\{\left(1+\frac{\beta k_{ef}}{\delta k-\beta k_{ef}}\right)\exp\left[\frac{\delta k-\beta k_{ef}}{\bar{l}}t\right]-\frac{\beta k_{ef}}{\delta k-\beta k_{ef}}\right\}. \qquad (6.21)$$

Fluxul de neutroni creşte proporţional cu funcţia exponenţială

$$\exp\left[\frac{\delta k-\beta k_{ef}}{\bar{l}}t\right]. \qquad (6.22)$$

Un reactor cu un astfel de exces de reactivitate se zice că este „critic prompt" şi într-o stare extrem de periculoasă, dacă creşterea fluxului de neutroni nu a fost micşorată prin alte procese fizice care vor fi explicate mai tîrziu.

III. Să considerăm acum cazul în care excesul de reactivitate este ceva mai mic decît fracţiunea de neutroni întîrziaţi dar totuşi destul de aproape de aceasta ($\delta k-\beta k_{ef}<0$ şi $\delta k\approx\beta$).

Atunci apare o creştere exponenţială a fluxului de neutroni conform funcţiei

$$\Phi=\Phi_0\frac{\beta k_{ef}}{\beta k_{ef}-\delta k}\left[1-\exp\left\{-\frac{(\beta k_{ef}-\delta k)t}{\bar{l}}\right\}\right] \qquad (6.22\text{ a})$$

deoarece $\beta k_{ef}/(\beta k_{ef}-\delta k)\gg 1$.

Cele trei cazuri descrise mai sus pot fi reprezentate calitativ în diagrama următoare (fig. 6.1).

Consideraţiile făcute mai sus în aproximaţia teoriei bigrupale arată că există o limită critică a creşterii în reactivitate cînd aceasta este egală cu fracţiunea de neutroni întîrziaţi şi că în general această limită nu trebuie depăşită. Tratarea multigrup dată în capitolul următor conduce la acelaşi rezultat.

IV. Vom considera acum acele cazuri în care excesul de reactivitate este foarte mic în comparaţie cu fracţiunea de neutroni întîrziaţi, adică pentru

$$\delta k\ll\beta k_{ef}, \qquad \delta k>0.$$

Scanned with OKEN Scanner

În concordanță cu experiența, în aceste cazuri apare o creștere exponențială lentă a fluxului de neutroni. La începutul acestui proces variația fluxului de neutroni este descrisă de o funcție complicată; sîntem interesați numai în comportarea asimptotică a fluxului de neutroni după un timp mai lung și încercăm pentru aceasta funcția

$$\Phi = c \cdot \exp[\alpha t] \text{ pentru } t \text{ mare.} \tag{6.23}$$

Înlocuind aceasta în ecuația (6.16), obținem

$$\bar{l}\alpha\Phi = \delta k \cdot \Phi - \alpha k_{ef} \cdot \beta \int_0^t \exp[-\lambda(t-t_1)] \exp[\alpha t_1] dt_1 = \delta k \cdot \Phi -$$

$$- \frac{\alpha}{\alpha+\lambda} \beta k_{ef} \Phi \{1 - \exp[-(\alpha+\lambda)t]\}. \tag{6.24}$$

Deoarece după un timp, $\exp[-(\alpha+\lambda)t]$ devine neglijabil de mic, α trebuie să satisfacă

$$\bar{l}\alpha = \delta k - \frac{\alpha}{\alpha+\lambda} k_{ef} \beta. \tag{6.25}$$

Putem presupune că pentru reactivități foarte mici, constanta de timp α devine mică și, comparată cu timpul de înjumătățire λ, poate fi ignorată. Rezultă o ecuație liniară simplă pentru reactivitate

$$\delta k = \alpha \left[\bar{l} + \frac{\beta}{\lambda} k_{ef} \right] \tag{6.26}$$

ca și pentru constanta de timp

$$\alpha = \frac{\delta k}{\bar{l} + \frac{\beta k_{ef}}{\lambda}} = \frac{\delta k}{\tau}. \tag{6.27}$$

Cantitatea τ introdusă este media timpului de viață pentru toți neutronii. Fizic, aceasta înseamnă că se poate stabili constanta de timp α pentru schimbări lente în reactor, prin timpul de viață mediu al tuturor neutronilor într-o analiză monogrupală conform paragrafului 2. Aici $\tau = 0{,}1$ s.

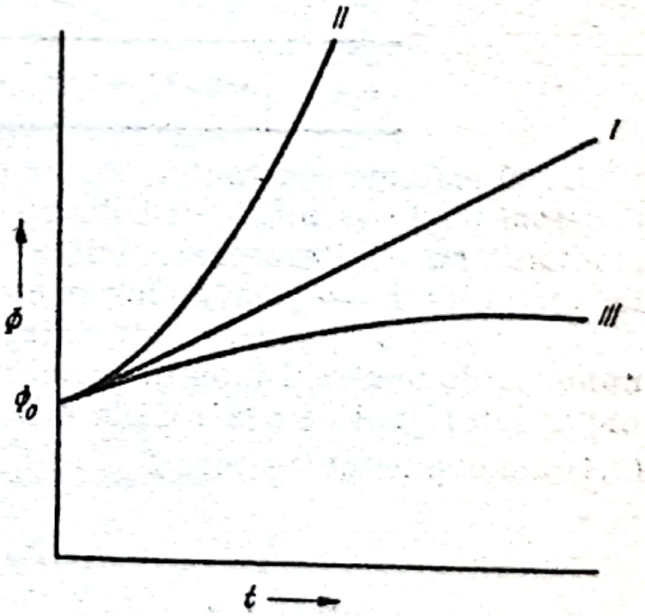


Fig. 6.1. Variația fluxului de neutroni pentru cazurile I, II și III.

V. Să considerăm acum cazul în care δk este negativ și foarte mic. El se poate trata exact în același mod ca și cazul precedent, ecuația (6.26) conducînd din nou la ecuația (6.27).

Scanned with OKEN Scanner

VI. În final considerăm cazul în care δk are o valoare negativă mare. Această situaţie apare cînd un reactor este oprit prin introducerea absorbanţilor de neutroni (bare de oprire). Atunci, fluxul de neutroni va scădea rapid şi prin urmare constanta de timp trebuie să fie mai mică decît zero şi $|\alpha| < \lambda$, dacă comportarea asimptotică a fluxului de neutroni este descrisă corect de ecuaţia (6.24). Aceasta înseamnă că fluxul de neutroni scade mult mai încet decît concentraţia neutronilor întîrziaţi.

Pentru cazul $\lambda = (10\ \text{s})^{-1}$, unde conform celor spuse α trebuie să fie mai mic decît $(10\ \text{s})^{-1}$ şi $\delta k = 0{,}1$, $\bar{t}$ va fi cel mult 10^{-3}—10^{-4} s, astfel că partea stîngă a ecuaţiei (6.25) poate fi egalată cu zero. Din ecuaţia (6.25) reactivitatea este atunci dată de

$$\delta k = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \lambda} k_{ef} \tag{6.28}$$

în timp ce constanta de timp este

$$\alpha = \frac{-\lambda}{1 - \dfrac{\beta k_{ef}}{\delta k}}. \tag{6.29}$$

Pentru exemplul nostru calculul dă $\alpha = -\lambda \times 0{,}93$ cu $\beta = 0{,}0073$ şi $k_{ef} = 1$. Mai jos sînt date cîteva valori ale lui α/λ pentru diferiţi δk:

δk	$-1{,}0$	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$
α/λ	$-0{,}993$	$-0{,}98$	$-0{,}93$	$-0{,}852$	$-0{,}58$

Ca şi mai sus constantele de timp α/λ arată că scăderea fluxului de neutroni poate să nu fie atît de rapidă pe cît se doreşte. Pentru a opri reactorul cu o viteză rezonabilă este necesară o reactivitate negativă de cel puţin $k = -0{,}05$ (adică pentru $\alpha \approx -\lambda$).

Să găsim acum raportul dintre numărul de neutroni prompţi şi numărul de neutroni latenţi. Numărul neutronilor prompţi este obţinut împărţind fluxul de neutroni la viteza neutronilor, $n = \Phi/v$. În ecuaţia (6.4) am explicitat legătura $\Sigma_a v = 1/\bar{t}$. Astfel, numărul de neutroni prompţi este

$$n = \Sigma_a \cdot \Phi \cdot \bar{t}. \tag{6.30}$$

Numărul neutronilor latenţi, din ecuaţia (6.13), este

$$N = \frac{k_\infty}{\lambda p} \cdot \beta \cdot \Sigma_a \Phi. \tag{6.31}$$

(Integrala care conţine fluxul de neutroni este pentru acest caz zero, deoarece nu considerăm un proces variabil în timp ci un caz staţionar.)

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă atunci că raportul dintre numărul de neutroni prompți și latenți este

$$\frac{n}{N} = \frac{\lambda p}{k_\infty p} \cdot \bar{l}. \tag{6.32}$$

Pentru un calcul estimativ se pot presupune următoarele valori care sînt apropiate de realitate

$$\beta \approx 0{,}01,\ \lambda \approx 10^{-1}\text{s}^{-1},\ p \approx 1,\ k_\infty \approx 1,\ \bar{l} \approx 10^{-3}\ \text{s}.$$

Urmează atunci că raportul dintre numărul de neutroni prompți și latenți este dat de

$$\frac{n}{N} = 10^{-2}.$$

Rezultă că majoritatea neutronilor într-un reactor sînt neutroni întîrziați latenți.

Astfel, acum este clar de ce neutronii întîrziați au un efect de întîrziere relativ mare asupra tuturor variațiilor fluxului de neutroni într-un reactor. Se poate imagina că neutronii latenți sînt înmagazinați într-un „acumulator umplut" care la fiecare schimbare a fluxului de neutroni trebuie să fie mai întîi adaptat la noua situație din reactor.

4. Comportarea dinamică a unui reactor în cazul considerării a șase grupe de neutroni

Ca urmare a considerațiilor din secțiunea precedentă, dorim acum să rafinăm studiul, astfel încît să corespundă mai bine situației reale, împărțind neutronii în șase grupe de neutroni întîrziați, cu constantele de timp corespunzătoare. Proporția de neutroni întîrziați este caracterizată de fracțiunea β_i, cu constanta de timp λ_i. În tabelul următor aceste valori sînt date pentru cei trei izotopi fisionabili U-233, U-235 și Pu-239.

Grupa	Timp de viață s	Constantă de timp, s^{-1}	Proporția β_i		
			U^{233}	U^{235}	Pu^{239}
1	0,114	6,2	—	0,0003	—
2	0,439	1,6	0,00018	0,00083	0,0004
3	2,11	0,33	0,00061	0,0024	0,00105
4	5,50	0,13	0,00086	0,0021	0,00112
5	19,78	0,035	0,00058	0,0017	0,00094
6	54,31	0,013	0,00018	0,00026	0,00012
Total			0,0024	0,0076	0,0036

Scanned with OKEN Scanner

În locul ecuației (6.9) obținem, pentru cele șase grupe de neutroni întîrziați, șase ecuații de forma

$$\frac{dN_i}{dt} = \beta_i \frac{k_\infty}{p} \Sigma_a \Phi - \lambda_i N_i;$$

folosim o metodă similară ca și la rezolvarea ecuației (6.9) și obținem ca rezultat

$$N_i = \frac{k_\infty \Sigma_a}{\lambda_i p} \left\{ \beta_i \Phi(t) - \int_0^t \beta_i \exp[-\lambda_i (t - t_1)] \frac{d\Phi(t_1)}{dt_1} dt_1 \right\} \qquad (6.34)$$

unde s-a notat

$$D(t) = \Sigma_i \beta_i \exp(-\lambda_i t). \qquad (6.35)$$

Înlocuirea în ecuația pentru neutronii prompți (vezi ecuațiile (6.2) pînă la (6.5)) dă, în mod analog, ca și în ecuația (6.16)

$$\bar{l} \frac{d\Phi}{dt} = \delta k \cdot \Phi - k_{ef} \int_0^t dt_1 D(t - t_1) \frac{d\Phi(t_1)}{dt_1}. \qquad (6.36)$$

Putem interpreta această ecuație, care descrie comportarea cinetică a unui reactor, într-o manieră similară cu interpretarea ecuației (6.16).

Expresia integrală reprezintă o contribuție la reactivitate care poate fi atît pozitivă cît și negativă, după cum fluxul de neutroni în reactor a crescut sau a scăzut înainte de momentul considerat.

În cursul discuției ce urmează se va arăta că această manieră de reprezentare a efectului neutronilor întîrziați este foarte practică.

Vom examina acum acele procese din reactor care se află în regiunea de criticitate promptă, adică presupunem că, pentru un timp scurt, reactivitatea δk este la fel de mare, sau ceva mai mare decît proporția de neutroni întîrziați. Într-un astfel de caz putem din nou dezvolta funcția $D(t)$ într-o serie și să ne oprim la primul termen deoarece constanta de timp λ_i este mult mai mare decît timpul în care se desfășoară reacția considerată

$$D(t) = \sum_i \beta_i - \sum_i \beta_i \lambda_i t + \ldots \approx \sum_i \beta_i. \qquad (6.37)$$

Aceasta conduce la o ecuație analogă ecuației (6.19), care poate fi rezolvată la fel ca și în paragraful precedent. Luînd în considerare toate grupele de neutroni întîrziați ajungem, analog cu (6.26), la următorul rezultat pentru reactivitate

$$\delta k = \left(\bar{l} + k_{ef} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \right) \alpha; \qquad (6.38)$$

Scanned with OKEN Scanner

Constanta de timp este dată de

$$\alpha = \frac{\delta k}{\bar{l} + k_{ef} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}}, \tag{6.39}$$

Interpretarea fizică a acestei ecuații pentru diferitele reactivități corespunde exact aceleia date ecuațiilor analoge în paragraful precedent.

Ar fi de adăugat că această reprezentare este suficient de exactă pentru schimbări lente ale fluxului de neutroni. Prin urmare, în timpul funcționării reactorului, perioadele de timp pentru schimbări în fluxul de neutroni sînt alese astfel încît să fie de cîteva ori mai mari decît timpii de dezintegrare pentru producerea neutronilor întîrziați. Atunci aceste procese pot fi tratate cu o precizie suficientă, pentru scopul practic, cu ajutorul unor funcții exponențiale și a unei constante de timp α în conformitate cu (6.39).

O excepție este oprirea unui reactor care trebuie să aibă loc cît de repede posibil. Aici reactivitatea este

$$\delta k < 0 \text{ și } |\delta k| \gg \beta. \tag{6.40}$$

Să arătăm că o scădere exponențială a fluxului de neutroni, la procesul de oprire,

$$\Phi = \Phi_0 \exp(-\alpha t) \tag{6.41}$$

poate apărea numai dacă $\alpha < \lambda_k$ (λ_k — constanta de dezintegrare pentru grupul de neutroni întîrziați cu viața cea mai lungă). Introducem ecuația (6.41) în ecuația (6.36) și cerem ca δk să intre în noua ecuație ca o cantitate dependentă de timp. Atunci obținem

$$-\alpha \bar{l} \Phi = \delta k \cdot \Phi + k_{ef} \sum_i \beta_i \frac{\alpha \Phi}{\lambda_i - \alpha} \left\{ 1 - \exp[-(\lambda_i - \alpha) t] \right\} \tag{6.42}$$

sau

$$\delta k = -\alpha \bar{l} - k_{ef} \sum_i \beta_i \frac{\alpha}{\lambda_i - \alpha} \{1 - \exp[-(\lambda_i - \alpha) t]\}. \tag{6.43}$$

Dacă α a fost egal cu λ_k, atunci reactivitatea δk ar trebui să satisfacă

$$\delta k = -\alpha \bar{l} - k_{ef} \cdot \beta_k \alpha t - k_{ef} \sum_{i \neq k} \beta_i \frac{\alpha}{\lambda_i - \alpha} \left\{ 1 - \exp[-(\lambda_i - \alpha) t] \right\}, \tag{6.44}$$

Aceasta înseamnă că valoarea absolută a reactivității δk ar crește nelimitat, deoarece este liniar dependentă de timp. În practică, totuși, aceasta nu se întîmplă niciodată, deoarece δk poate fi cel mult egal cu —1, cînd $k_{ef} = 0$. Astfel, condiția $\alpha = \lambda_k$ nu poate fi satisfăcută. Condiția $\alpha > \lambda_k$ este chiar mai puțin posibil a se realiza, așa cum se poate arăta ușor.

Scanned with OKEN Scanner

A rămas numai posibilitatea ca $\alpha<\lambda_k$. Aceasta înseamnă că reacţia în lanţ se opreşte, scăzînd puţin mai lent decît concentraţia celei mai lente grupe de neutroni întîrziaţi şi tinzînd asimptotic către aceasta.

O mărime importantă în procesul de oprire este doza de neutroni $D=\int_0^\infty \Phi dt$ produsă în timp ce reactorul are o reactivitate negativă.

Această doză de neutroni este o măsură a energiei care se mai produce încă. Ea se obţine prin integrarea ecuaţiei (6.36) de la $t=0$ la $t=\infty$

$$\bar{l}\{\Phi(\infty)-\Phi(0)\}=\delta k\int_0^\infty dt\Phi(t)-k_{ef}\int_0^\infty dt\int_0^t D(t-t_1)\frac{d\Phi(t_1)}{dt_1}dt_1. \quad (6.45)$$

Pentru rezolvarea integralei care rămîne, presupunem că

$$\Phi=\sum_r C_r\exp(-\alpha_r t) \text{ cu } \Phi(0)=\sum_r C_r. \quad (6.46)$$

Putem presupune că $\alpha_r>0$ pentru toate valorile lui α_r, deoarece ecuaţia (6.46) este o funcţie care tinde către 0 dacă $t\to\infty$. ($\Phi(\infty)=0$). Cu aceste condiţii se obţine chiar fără cunoaşterea lui C_r şi α_r prin înlocuirea ecuaţiei (6.46) în ecuaţia (6.45)

$$-\bar{l}\Phi(0)=\delta k\int_0^\infty \Phi dt+\Phi(0)k_{ef}\sum_i\frac{\beta_i}{\lambda_i} \quad (6.47)$$

sau

$$D=\int_0^\infty \Phi dt=-\frac{\bar{l}+k_{ef}\sum_i\frac{\beta_i}{\lambda_i}}{\delta k}\Phi(0). \quad (6.48)$$

La numărătorul acestei fracţii este timpul mediu de viaţă al neutronilor termici. Doza D la oprire este cu atît mai mică cu cît este mai mare reactivitatea negativă de oprire.

Exemplu:

$$\bar{l}+k_{ef}\sum_i\frac{\beta_i}{\lambda_i}\approx 0{,}1\text{ s};\quad \delta k=-0{,}05;\quad \Phi(0)=10^{14}\text{ cm}^2\text{s}$$

$$D=\frac{0{,}1}{0{,}05}\times 10^{14}/\text{cm}^2=2\times 10^{14}/\text{cm}^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VII

INFLUENȚA TEMPERATURII ASUPRA DINAMICII REACTORULUI

1. Influența coeficientului de temperatură

Considerațiile făcute pînă acum nu au luat în seamă faptul că factorul de multiplicare k_{ef} este depedent de temperatură. Această dependență este descrisă în cap. III, pag.106. Cu ecuațiile deduse acolo, efectul temperaturii poate fi calculat numai cu o precizie de 20 procente. Pentru siguranță, efectul de temperatură este măsurat experimental înainte de pornirea reactorului. Schimbarea factorului de multiplicare cu temperatura poate fi atunci exprimată în întreg domeniul de variație a temperaturii reactorului, suficient de exact cu ajutorul unui coeficient de temperatură Γ

$$k_{ef}(T)=k_{ef}(T_0)+\delta k-\Gamma T. \tag{7.1}$$

T_0 este temperatura medie (peste temperatura camerei) a reactorului la începutul perioadei discutate, T este diferența dintre temperatura medie a reactorului și T_0, iar δk este creșterea suplimentară a reactivității. Putem, de asemenea, să scriem

$$\delta k(T)=\delta k-\Gamma T. \tag{7.2}$$

Pentru majoritatea reactorilor, Γ este pozitiv și de un ordin de mărime cuprins între 5×10^{-5} și 10^{-4}/°C. În practică aceasta înseamnă că la creșterea temperaturii constanta de multiplicare devine mai mică și prin urmare concentrația de neutroni scade. O excepție de la această regulă apare în cazul Pu-239 folosit în calitate de combustibil în reactorii termici. În acest caz coeficientul de temperatură este negativ, adică reactorul nu are o autostabilizare, astfel că este necesară o atenție specială în controlul unor astfel de reactori. Mărimea corectată

pentru reactivitate $\delta k(T)$ din ecuația (7.2) este introdusă în ecuația pentru neutronii prompți (ecuația (6.36)) și se obține

$$\bar{l}\frac{d\Phi}{dt} = (\delta k - \Gamma T)\Phi - k_{ef}\int_0^t dt_1 D(t-t_1)\frac{d\Phi(t_1)}{dt_1}. \tag{7.3}$$

În această ecuație a reactorului nu a fost luat în considerație faptul că fluxul de neutroni este dependent de energia produsă de reactor. Acumularea de energie produsă sub formă de căldură și cantitatea de căldură preluată schimbă continuu temperatura reactorului și deci fluxul de neutroni. Energia calorică acumulată în unitatea de timp este

$$C\frac{dT}{dt} \tag{7.4}$$

(C — capacitatea calorică totală (în kcal/°C) a reactorului). Energia calorică extrasă în unitatea de timp este

$$F \cdot \alpha(T_0 + T - \theta) \tag{7.5}$$

(în această ecuație α este coeficientul de transfer a căldurii, în kcal/h · °C · m², θ — temperatura medie a gazului de răcire pentru întreg reactorul și F— suprafața de transfer a căldurii pentru întreg reactorul). Energia cedată de reactor este deci

$$Q = C\frac{dT}{dt} + \alpha \cdot F(T_0 + T - \theta). \tag{7.6}$$

Puterea cedată de reactor este dependentă de numărul de fisiuni pe cm³ și secundă, $\Sigma_f \cdot \Phi$ și de volumul V al reactorului (vezi cap. II, ecuația (2.11))

$$Q = \Sigma_f \cdot \Phi \cdot V \cdot E_f \tag{7.7}$$

(E_f—energia cedată per fisiune).

Dependența directă a puterii cedate de fluxul de neutroni permite ca ea să fie introdusă în ecuația (7.3) în locul fluxului de neutroni

$$\bar{l}\frac{dQ}{dt} = (\delta k - \Gamma T)Q - k_{ef}\int_0^t dt_1 D(t-t_1)\frac{dQ(t_1)}{dt_1}. \tag{7.8}$$

Secțiunea de fisiune Σ_f este pe de altă parte dependentă în mod similar de temperatură. Un raționament mai exact arată însă, că la folosirea U-233 și U-235 ca combustibil această dependență este mică în comparație cu dependeța de temperatură a lui Φ și că în cazul folosirii Pu-239 ca combustibil această dependență poate fi reprezentată sub forma

Scanned with OKEN Scanner

unei corecții a coeficientului de temperatură într-o aproximație adecvată.

Ecuația (7.8) dă unele relații interesante. Dacă energia cedată Q este crescută, atunci conform ecuației (7.6) temperatura ($T>0$) crește și astfel $(\delta k(T_0)-\Gamma T)<0$ și $dQ/dt<0$; în acest fel energia la ieșire se micșorează din nou. Expresia integrală corespunde unei întîrzieri a acestor procese. Dinamica reactorului arată prin urmare trei caracteristici de bază:

1°. Puterea și temperatura au o limită superioară.

2°. Variația puterii la ieșire și a temperaturii este întîrziată.

3°. Această întîrziere este cu atît mai mare cu cît variația însăși este mai mare.

Această autoreglare reprezintă un excelent stabilizator al reactorului, care cu greu s-ar realiza mai bine printr-un reglaj exterior.

La o reactivitate δk dată și o temperatură medie a reactorului T (superioară temperaturii camerei) reactorul însuși se stabilizează la valorile

$$\frac{dQ}{dt}=0, \quad \delta k=\Gamma T, \quad Q=\alpha\cdot F(T_0+T-\theta)=\alpha\cdot F\left(T_0+\frac{\delta k}{\Gamma}-\theta\right).$$

În final, temperatura medie a gazului de răcire poate fi exprimată în funcție de curentul de răcire, care este caracteristic pentru fiecare sistem de reactor. Să notăm curentul de răcire prin J (kg/s). Atunci scăderea de energie pe secundă este $J\cdot c_p\cdot 2(\theta-\theta_0)$ dacă θ_0 este temperatura de intrare și c_p este căldura specifică a mediului de răcire. $2(\theta-\theta_0)$ este diferența de temperatură cu care agentul de răcire este încălzit la trecerea prin reactor. Această putere cedată trebuie să fie egală cu aceea cedată de elementele de combustibil agentului de răcire în ecuația (7.5)

$$F\alpha(T_0+T-\theta)=2Jc_p(\theta-\theta_0). \tag{7.9}$$

Scoțînd θ din (7.9) și înlocuindu-l în (7.6) obținem

$$Q=C\frac{dT}{dt}+\frac{2Jc_p\alpha F}{2Jc_p+\alpha F}(T_0+T-\theta_0). \tag{7.10}$$

2. Schimbări lente

În timpul funcționării normale a unui reactor vor fi întreprinse numai acele operațiuni care au ca rezultat schimbări lente ale fluxului de neutroni, puterii de ieșire, temperaturii și cantității de energie cedate. O comparare cu constantele de dezintegrare și prin urmare cu scăderea

Scanned with OKEN Scanner

numărului de neutroni întîrziaţi, dă o măsură a vitezei acestor schimbări. Mărimea timpului de dezintegrare al unui grup foarte mic de neutroni poate fi admisă a fi de cca. 60 s; astfel se poate spune că orice proces de reglare care durează cel puţin 60 s reprezintă o schimbare „lentă".

În aceste cazuri ecuaţia (6.48) poate fi considerabil simplificată în practică. Să utilizăm funcţia definită în ecuaţia (6.35) şi să scriem în mod corespunzător

$$D^{(1)}(t) = \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \exp(-\lambda_i t). \tag{7.11}$$

Integrînd prin părţi se găseşte

$$\int_0^t D^{(1)}(t-t_1) \frac{d^2Q(t_1)}{dt_1^2} dt_1 = \left[D^{(1)}(t-t_1) \frac{dQ(t_1)}{dt_1} \right]_0^t -$$

$$- \int_0^t D(t-t_1) \frac{dQ(t_1)}{dt_1} dt_1. \tag{7.12}$$

Diferenţierea ecuaţiei (7.12) în raport cu t_1 confirmă corectitudinea acestei soluţii.

După ce au fost introduse limitele în primul termen, din ecuaţia (7.12) se obţine

$$\int_0^t D(t-t_1) \frac{dQ(t_1)}{dt_1} dt_1 = \frac{dQ(t)}{dt} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} - \frac{dQ(0)}{dt} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \exp(-\lambda_i t) -$$

$$- \int_0^t D^{(1)}(t-t_1) \frac{d^2Q(t_1)}{dt_1^2} dt. \tag{7.13}$$

Deoarece presupunem o schimbare lentă, variaţia iniţială a puterii de ieşire

$$\frac{dQ(0)}{dt} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \exp(-\lambda_i t)$$

va tinde repede către 0 la fel ca şi derivata a doua, adică $d^2Q(t)/dt^2 \approx 0$, astfel că putem neglija ultimii doi termeni ai ecuaţiei (7.13), care devine

$$\int_0^t D(t-t_1) \frac{dQ(t_1)}{dt_1} dt_1 \approx \frac{dQ(t)}{dt} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}. \tag{7.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducem această expresie simplificată în ecuația (7.8) și obținem

$$\tau \frac{dQ}{dt} = (\delta k - \Gamma T)Q \quad \text{cu} \quad \tau = \left(\overline{l} + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}\right) \tag{7.15}$$

unde τ este timpul mediu de viață al tuturor neutronilor. Ecuația (7.13) reprezintă, împreună cu (7.6), un sistem de ecuații diferențiale neliniare. O rezolvare completă a unor asemenea sisteme este foarte dificilă și nu există pentru cazul nostru. Pe de altă parte, din cauza componentei neliniare, acest sistem are proprietățile unei ecuații pătratice, adică mărimea variabilei Q este fixată. Chiar fără o soluție completă, pot fi făcute unele deducții simple cu ajutorul ecuațiilor diferențiale de mai sus, pentru funcționarea normală a unui reactor.

Pentru fiecare stare staționară este adevărată relația

$$\tau \frac{dQ}{dt} = 0 = (\delta k - \Gamma T)Q$$

din care rezultă că

$$\delta k = \Gamma T \tag{7.16}$$

și

$$C \cdot \frac{dT}{dt} = 0 = Q - \alpha F(T_0 + T - \theta)$$

din care

$$Q = \alpha F(T_0 + T - \theta). \tag{7.17}$$

Dacă temperatura este egală cu temperatura normală de funcționare, adică $T=0$, atunci, conform definiției, δk este de asemenea 0 și în baza ecuației (7.17) puterea normală produsă este

$$Q_0 = \alpha F(T_0 - \theta). \tag{7.18}$$

Puterea normală este funcție numai de temperatura normală, temperatura gazului și coeficientul de transfer al căldurii. Toate schimbările în puterea reactorului conduc din nou la starea staționară, care este dată de perechea de ecuații (7.17) și (7.18).

Funcția de transfer poate fi în general stabilită numai cu ajutorul calculatoarelor. Unele cazuri simple care caracterizează comportarea reactorului în perioada de tranziție urmează a fi discutate mai jos.

a) *Creșterea lentă a puterii reactorului fără schimbarea reactivității*

Pentru cazul $\delta k = 0$ să creștem puterea reactorului care la început să fie de forma

$$Q = Q_0 \exp(\mu t). \tag{7.19}$$

Dacă se înlocuieşte această expresie în ecuaţia (7.15), se obţine

$$T = -\frac{\tau\mu}{\Gamma} = \text{const.} \tag{7.20}$$

Cu aceste două cantităţi, (7.19) şi (7.20), din ecuaţia (7.6) se obţine

$$\alpha F = \frac{Q_0 \exp(\mu t)}{\left(T_0 - \frac{\tau\mu}{\Gamma} - \theta\right)}, \tag{7.21}$$

Rezultatul arată că pentru o creştere exponenţială a puterii reactorului în timpul pornirii sale, coeficientul de transfer al căldurii trebuie să crească exponenţial, în timp ce temperatura de lucru T scade. Să explicăm acest rezultat mai bine cu ajutorul unui exemplu numeric:

— constanta de timp pentru puterea reactorului $\mu = 10^{-3}$/s (adică energia se dublează în aproximativ 11 minute)
— coeficientul de temperatură $\Gamma = 10^{-4}$/°C
— timpul mediu de viaţă al tuturor neutronilor $\tau = 0{,}1$ s.

Atunci, conform ecuaţiei (7.20)

$$T = -\frac{0{,}1 \times 10^{-3}}{10^{-4}}\ °\text{C} = -1\ °\text{C}.$$

Acest exemplu arată că la procese de comutare devierile faţă de temperatura de lucru sînt mici.

b) *Scăderea lentă a puterii reactorului*

Consideraţiile precedente se aplică „mutatis mutandis" pentru o scădere lentă a puterii reactorului, dar constanta de timp μ trebuie să fie negativă în ecuaţiile (7.19) şi (7.21).

În acest caz avem o creştere a temperaturii de lucru cu valoarea

$$\frac{\tau\mu}{\Gamma}, \tag{7.22}$$

Să alegem ca exemplu următoarea situaţie:

$\mu = 10^{-2}$/s (puterea scade la jumătate în 1,2 minute)
$\Gamma = 10^{-4}$/°C
$\tau = 0{,}1$ s.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$T = \frac{10^{-1} \times 10^{-2}}{10^{-4}} \text{ °C} = 10 \text{ °C}.$$

c) *Creşterea lentă a puterii fără schimbarea temperaturii*

Pentru aceste cazuri atît T cît şi dT/dt trebuie să fie zero.

Cele două ecuaţii care descriu comportarea reactorului sînt acum

$$\tau \frac{dQ}{dt} = \delta k \cdot Q \tag{7.23}$$

şi

$$Q = -\alpha F(T_0 - \theta). \tag{7.24}$$

Aici δk este o funcţie de timpul t. Reactivitatea poate fi schimbată cu ajutorul barelor de control şi aleasă astfel ca $T=0$ şi $dT/dt=0$.

Să dublăm puterea de exemplu, după legea

$$Q = Q_0(2 - \exp[-\Lambda t]). \tag{7.25}$$

Transferul de căldură va fi, de asemenea, în măsură să facă o reglare de început, astfel că $\alpha F = A(t)$ respectă aceeaşi lege ca şi variaţia puterii

$$A(t) = A_0(2 - \exp[-\Lambda t]). \tag{7.26}$$

Din ecuaţiile (7.23) şi (7.24) rezultă

$$\delta k(t) = \tau \cdot \Lambda \frac{\exp[-\Lambda t]}{2 - \exp[-\Lambda t]}, \tag{7.27}$$

Valoarea iniţială a reactivităţii devine

$$\delta k(0) = \frac{1}{2} \Lambda \tau. \tag{7.28}$$

Dacă procesul are loc în cîteva minute, atunci trebuie să alegem $\Lambda \approx \approx 10^{-2}$s; aceasta dă pentru reactivitate: $\delta k(0) = 0{,}5 \times 10^{-3}$ cu $\tau = 0{,}1$s.

Dacă se reglează simultan coeficientul A al transferului de căldură şi reactivitatea, atunci se pot crea astfel de condiţii ca puterea reactorului să poată fi crescută fără schimbarea temperaturii şi reactivitatea să revină la zero prin salt, după cîteva minute.

Scanned with OKEN Scanner

d) *Creşterea lentă a puterii reactorului fără extragere de căldură*

În acest caz nu va avea loc un transfer de căldură, prin urmare $\alpha=0$. Deoarece temperatura reactorului este întotdeauna superioară temperaturii mediului înconjurător, o uşoară răcire Q nu poate fi evitată, în ciuda opririi gazului de răcire, aşa că obţinem ca ecuaţii caracteristice

$$\tau \frac{dQ}{dt} = (\delta k - \Gamma T) Q \tag{7.29}$$

şi

$$C \frac{dT}{dt} = Q - \delta Q. \tag{7.30}$$

Pentru starea iniţială, fie $\delta k=0$. Să presupunem trecerea reactorului de la temperatura de lucru la o nouă temperatură T_1 cu un grad maxim de siguranţă, adică temperatura şi puterea trebuie să crească foarte încet la început şi să tindă asimptotic către valoarea dorită.

Aceasta înseamnă în termeni matematici

$$\begin{gathered} T(0)=0, \quad T(\infty)=T_1, \quad Q(0)=\delta Q, \\ T'(0)=0, \quad T'(\infty)=0, \quad Q'(0)=0. \end{gathered} \tag{7.31}$$

Aceste condiţii pot fi îndeplinite, de exemplu, de funcţia

$$T = T_1 \frac{(\alpha t)^3}{1+(\alpha t)^3}. \tag{7.32}$$

Din ecuaţia (7.30) obţinem pentru energia produsă

$$Q = \delta Q + C T_1 \frac{3\alpha^3 t^2}{(1+(\alpha t)^3)^2}. \tag{7.33}$$

Schimbarea în reactivitate necesară pentru această operaţie poate fi determinată din ecuaţia (7.29)

$$\delta k = \frac{\Gamma T_1}{1+(\alpha t)^3} \left\{ \frac{\frac{6\tau C}{\Gamma} \alpha^3 t (1-2(\alpha t)^3)}{\delta Q (1+(\alpha t)^3)^2 + C T_1 3\alpha^3 t^2} + \alpha^3 t^3. \right\}. \tag{7.34}$$

Reactivitatea porneşte de la zero, adică $t=0$ şi $\delta k(0)=0$. Funcţia $\delta k(t)$ creşte încet cu $\delta k \approx 6 T_1 (\tau C \alpha^2 / \delta Q) \alpha t$. Pentru t mare, δk tinde asimptotic către o valoare $\delta k(\infty)$, care este determinată de noul nivel de temperatură T_1 şi de coeficientul de temperatură

$$\delta k(\infty) = \Gamma T_1. \tag{7.35}$$

Scanned with OKEN Scanner

După timpul $t=1/\alpha\sqrt[3]{2}$, puterea atinge valoarea sa maximă

$$Q_{max}=\delta Q+\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}CT_1\alpha. \tag{7.36}$$

Temperatura (T) și reactivitatea (δk) ating la timpul $t=1/\alpha\sqrt[3]{2}$, o treime din valoarea lor finală (vezi ecuațiile (7.32) și (7.34)).

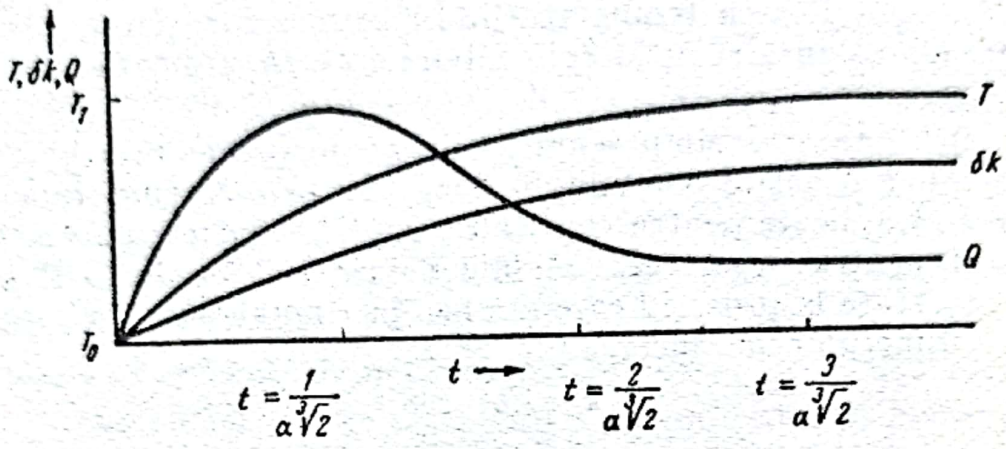


Fig. 7.1. Variația lui Q, δk și T pentru o creștere lentă a puterii care urmează opririi circulației agentului de răcire.

Conform ecuației (7.30) energia produsă pînă la timpul t este

$$\int(Q-\delta Q)dt=C\int dT=CT(t)=CT_1\frac{(\alpha t)^3}{1+(\alpha t)^3}. \tag{7.37}$$

După timpul $t=1/\alpha\sqrt[3]{2}$, (aproximativ o treime a duratei totale a procesului) energia produsă este aproximativ o treime și după $t=2/\alpha\sqrt[3]{2}$, patru cincimi (adică 0,8) din valoarea finală CT_1.

Diagrama de mai sus arată variația cu timpul a funcțiilor pentru temperatură, reactivitate și putere.

Diagrama arată că temperatura și reactivitatea cresc proporțional una cu alta; numai la început cele două curbe sînt influențate de prima expresie dintre parantezele ecuației (7.34); după un scurt timp cel de-al doilea termen din aceste paranteze este cel care guvernează forma curbei.

e) *Rezumat al cazurilor speciale tratate*

Au fost găsite trei soluții speciale ale ecuațiilor (7.6) și (7.15), pentru cazurile tipice din funcționarea unui reactor. Ele arată că la schimbări lente, comportarea în timp la începutul procesului este dif-

cil de reprezentat; pe de altă parte, tranziția lentă însăși respectă legi relativ simple.

În practică se poate presupune în general că parametrul controlat urmează aproape exact parametrul regulator, dacă procesul are loc suficient de lent.

Aceasta înseamnă pentru primele două exemple: creșterea sau scăderea puterii reactorului fără schimbarea reactivității; schimbarea puterii fără modificarea temperaturii. În primul caz, puterea urmează transferul de căldură și în al doilea temperatura urmează schimbarea reactivității.

Exemplele noastre simple arată, de asemenea, că soluțiile care ne interesează pot fi găsite mai simplu dacă, în primul rînd funcțiile de încercare sînt aplicate pentru cantitățile căutate și dacă parametrul de reglaj cerut pentru proces este stabilit corespunzător; în final soluțiile sînt apoi ajustate la procesul care are loc în timpul operației, pe calea corecțiilor funcțiilor de încercare.

3. Reglarea rapidă a transferului de căldură

În timpul funcționării unui reactor poate deveni necesară oprirea transferului de căldură al centralei. Aceasta poate apare datorită unui accident, dar este de asemenea posibil ca o astfel de operație să fie planificată din timp, pe durata funcționării reactorului. Deoarece într-o astfel de situație reactorul va funcționa la o valoare particulară a puterii — adică puterea produsă în reactor este eliminată pe calea schimbătorului de căldură — temperatura în interiorul reactorului va crește întotdeauna datorită decuplării bruște a centralei termice. Există o problemă în acest caz cînd procesul are loc rapid, astfel că în cele ce urmează influența neutronilor întîrziați trebuie să fie privită mai atent decît pînă acum.

Astfel, se aplică ecuațiile

$$\bar{l}\frac{dQ}{dt} = (\delta k - \Gamma T)Q - \int_0^t dt_1 D(t-t_1)\frac{dQ(t_1)}{dt_1} \qquad (7.38)$$

și

$$C\frac{dT}{dt} = Q - A(T_0 + T - 0) \qquad (7.39)$$

conform ecuațiilor (7.6), (7.8).

Scanned with OKEN Scanner

Pînă la momentul $t=0$ reactorul este într-o stare staționară caracterizată prin următoarele cantități

$$Q=Q_0=A_0(T_0-\theta), \qquad A=A_0, \tag{7.40}$$

$$\frac{dT}{dt}=0, \qquad T=0, \qquad \delta k=0. \tag{7.41}$$

O situație ca cea descrisă mai înainte va duce în primul rînd la schimbarea reactivității δk și a coeficientului A al transferului de căldură. Transferul de căldură dispare în 20 pînă la 100 s; atunci A tinde către zero. Ne propunem în considerațiile noastre să fim foarte pesimiști și presupunem că A tinde brusc către zero.

În multe cazuri trebuie, de asemenea, să se țină cont de faptul că reactivitatea se modifică fie prin introducerea barelor, fie prin schimbarea compoziției materialului zonei active (de exemplu pierderea agentului de răcire absorbant de neutroni). Schimbarea posibilă a reactivității trebuie, de asemenea, să fie luată în considerare atît ca o variație pozitivă cît și negativă.

După momentul $t=0$, în locul ecuației (7.39) se aplică următoarea ecuație

$$Q=C\frac{dT}{dt}. \tag{7.42}$$

Înlocuim această ecuație în ecuația (7.38) și integrăm de la 0 la ∞ în scopul de a obține creșterea de temperatură pentru T_∞

$$\bar{t}\{Q(\infty)-Q(0)\}=\delta k\cdot C\int_0^\infty \frac{dT}{dt}\,dt-\Gamma C\int_0^\infty \frac{dT}{dt}\,T\,dt-$$

$$-\int_0^\infty dt\int_0^t dt_1 D(t-t_1)\frac{dQ(t_1)}{dt_1}. \tag{7.43}$$

Deoarece reacția în lanț încetează ori de cîte ori nu se mai eliberează energie (autostabilizare), $Q(\infty)$ va fi în orice caz egal cu zero

$$-\bar{t}Q_0=\delta k\cdot C\cdot T_\infty-\frac{1}{2}\Gamma\cdot C\cdot T_\infty^2-$$

$$-\int_0^\infty dt\int_0^t dt_1 D(t-t_1)\frac{dQ(t_1)}{dt_1}. \tag{7.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

Urmează să fie evaluată integrala dublă; continuăm, prin urmare, integrarea prin părți (ecuația (7.13)) și obținem

$$\int_0^t dt_1 D(t-t_1)Q'(t_1) = Q'(t)\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} - Q'(0)\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}\exp(-\lambda_i t) +$$

$$+ Q''(t)\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i^2} + Q''(0)\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i^2}\exp(-\lambda_i t) + Q'''(t)\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i^3} \pm \ldots +$$

$$+ Q^{(n)}(t)\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i^n} - Q^{(n)}(0)\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i^n}\exp(-\lambda_i t) \pm \ldots \qquad (7.45)$$

La integrarea între limitele $t=0$ și $t=\infty$ (unde toate $Q(\infty)=Q'(\infty)=Q''(\infty)=\ldots=0$) în fiecare caz al doilea termen îl anulează pe al treilea, al patrulea îl anulează pe al cincilea etc.

Rezultatul este

$$\int_0^\infty dt \int_0^t dt_1 D(t-t_1)Q'(t_1) = -Q_0 \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}; \qquad (7.46)$$

substituind ecuația (7.46) în ecuația (7.44) se obține

$$-\tau Q_0 = \delta k \cdot C T_\infty - \frac{1}{2}\Gamma C T_\infty^2 \qquad (7.47)$$

și, prin urmare,

$$T_\infty = \frac{\delta k}{\Gamma} \pm \left\{\left(\frac{2\tau Q_0}{\Gamma C}\right) + \left(\frac{\delta k}{\Gamma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.48)$$

Numai rădăcina cu semn pozitiv are o semnificație fizică. Să explicăm acest rezultat cu ajutorul a patru exemple.

1°. Fie materialul fisionabil omogen, distribuit în grafit (moderator), astfel că poate fi introdusă capacitatea termică a de exemplu 40 tone grafit:

$Q_0 = 100$ MW (termic) $= 2{,}4 \times 10^4$ kcal/s

$\tau = 0{,}1$ s

$\Gamma = 10^{-4}/°C$

c_p(grafit) $= 0{,}2$ kcal/kg · °C, $C = 0{,}8 \times 10^{-4}$ kcal/°C, $\delta k = 0$.

Cu aceste valori se calculează

$$T_\infty = \left\{\frac{2 \times 0{,}1 \times 2{,}4 \times 10^4}{10^{-4} \times 0{,}8 \times 10^4}\right\}^{\frac{1}{2}} = 77{,}5°C.$$

2°. Fie aceleaşi condiţii ca şi în primul exemplu, exceptînd faptul că

$$\delta k = +0{,}02.$$

Atunci

$$T_\infty = 2 \times 10^2 + (0{,}6 \times 10^4 + 4 \times 10^4)^{1/2} = 414°C.$$

3° Fie reactivitatea pentru acelaşi reactor

$$\delta = -0{,}02.$$

Atunci

$$T_\infty = -2 \times 10^2 + (0{,}6 \times 10^4 + 4 \times 10^4)^{1/2} = 14°C.$$

4°. Fie aceeaşi situaţie ca în cel de-al doilea exemplu, dar cu $Q_0 = 200$ MW; aici rezultă

$$T_\infty = 28°C.$$

Exemplele citate şi ecuaţia (7.48) arată că pericolul de supraîncălzire a reactorului este mai mare, cînd raportul dintre puterea şi capacitatea calorică (puterea specifică) este mare sau coeficientul de temperatură este mic.

Deoarece creşterea în temperatură este puternic legată de reactivitate, pericolul unei creşteri bruşte a temperaturii poate fi prevenit prin reducerea reactivităţii (introducerea barelor de oprire).

4. Comportarea unui reactor în condiţii prompt-critice

Dacă reactivitatea creşte brusc peste nivelul critic β, într-un reactor care este în stare staţionară, reacţia în lanţ creşte exploziv datorită influenţei retardate a neutronilor întîrziaţi care nu mai pot să-şi joace rolul. Această perturbaţie este cea mai periculoasă în funcţionarea unui reactor. Ea poate fi declanşată de ridicarea barelor absorbante de neutroni; pierderea altor substanţe absorbante de neutroni — de exemplu pierderea de agenţi de răcire prin scăpări — poate duce de asemenea la acest eveniment: în final, această perturbaţie poate fi şi urmarea unei catastrofe externe.

În fracţiuni de secundă fluxul de neutroni creşte la o valoare mai mare cu 10 ordine de mărime faţă de fluxul în starea staţionară. Temperatura urmează puterea de ieşire cu aceeaşi viteză, dar după un scurt timp creşterea în temperatură opreşte reacţia. În cazul reactorilor omogeni, schimbarea bruscă în temperatură este ţinută sub control prin marea capacitate termică a sistemului (moderator+material fisionabil): la reactori eterogeni, totuşi, pot apare creşteri foarte mari de temperatură în interiorul elementelor combustibile.

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera acum cazul cel mai nefavorabil: un reactor eterogen în care nu are loc nici o pierdere de căldură către exterior, nici în timpul şi nici după „fulgerul de neutroni". Imediat puterea începe să scadă ca rezultat al creşterii mari a temperaturii şi tot excesul de reactivitate se anulează, neutronii întîrziaţi influenţînd din nou reacţia în lanţ. Puterea va reveni atunci în mod gradat către nivelul staţionar. Astfel, pentru starea finală $Q=0$ şi $T=T(\infty)$.

Pentru a determina această temperatură limită ne referim la ecuaţia (7.48), deoarece pentru deducerea acestei ecuaţii nu a fost făcută nici o limitare cu privire la reactivitate sau la viteza proceselor ce au loc.

Comportarea reactorului în timpul „fulgerului de neutroni" respectă funcţia din ecuaţia (6.38), în care pentru acest caz o bună aproximaţie este

$$D(t)=\beta. \tag{7.49}$$

Am presupus că nu mai are loc nici un transfer de căldură, adică $A=0$, astfel că pentru variaţia puterii obţinem

$$\bar{l}\,\frac{dQ}{dt}=(\delta k-\beta-\Gamma T)Q+\beta Q_0. \tag{7.50}$$

Pentru variaţia de temperatură avem

$$\frac{dT}{dt}=\frac{Q}{C}. \tag{7.51}$$

Condiţiile iniţiale sînt $Q=Q_0$ şi $T=0$.

Fluxul de neutroni creşte foarte rapid, creşterea fiind cu atît mai mare cu cît puterea iniţială Q_0 este mai mare. Este suficient, pentru acest proces, să considerăm numai primul termen din membrul doi al ecuaţiei (7.50)

$$\bar{l}\,\frac{dQ}{dt}=\delta k\cdot Q_0 \quad \text{şi} \quad \frac{dT}{dt}=\frac{Q_0}{C}. \tag{7.52}$$

Mărimea creşterii puterii dQ/dt la momentul $t=0$ este $\delta k/\bar{l}$.

Dacă, de exemplu, se presupune $\delta k=0{,}02$, creşterea puterii $\delta k/\bar{l}$, este deja 10 pînă la 100 pe secundă. Prin urmare, după un timp scurt ultimul termen din ecuaţia (7.50) nu va mai juca un rol semnificativ şi poate fi neglijat într-o a doua etapă.

Viteza de variaţie a temperaturii T depinde de puterea specifică Q_0/C. Chiar la o funcţionare în plină sarcină, acest raport este încă mic în comparaţie cu raportul $\delta k/\tau=(1/Q_0)(dQ/dt)$, variaţia în puterea. Aceasta înseamnă că la începutul procesului temperatura creşte mult mai încet decît puterea.

Scanned with OKEN Scanner

Constanta de timp α o stabilim acum, deoarece cerem să se știe timpul $1/\alpha$ în care are loc reacția. Dorim, de asemenea, să calculăm puterea maximă Q_{max}. Putem stabili ultima mărime din ecuațiile (7.50) și (7.51), ignorînd componenta βQ_0 în ecuația (7.50). Fie pentru ambele ecuații, soluțiile de probă

$$Q=\frac{Q_{max}}{\cos^2(\alpha t+\varphi)} \text{ și } T=T_1+C_1\operatorname{tg}(\alpha t+\varphi). \tag{7.53}$$

Pentru $Q=Q_{max}$, $dQ/dt=0$ și $\varphi=-\alpha t_{max}$; temperatura în acest moment conform ecuației (7.53) este egală cu T_1. Astfel, obținem T_1 din ecuația (7.50)

$$T_1=\frac{1}{\Gamma}(\delta k-\beta). \tag{7.54}$$

Dacă înlocuim expresiile din ecuația (7.53) în ecuațiile (7.50) și (7.51), cu valoarea de mai sus a lui T_1 obținem ecuațiile de determinare

$$\Gamma C_1=2\bar{t}\alpha \text{ și } Q_{max}=\alpha C C_1. \tag{7.55}$$

Obținem valoarea constantei C_1 din ecuațiile (7,48) și (7.54) considerînd cazul $t=\infty$ (temperatura finală). Astfel

$$T_\infty=\frac{1}{\Gamma}(\delta k-\beta)+C_1=\frac{\delta k}{\Gamma}+\left\{\frac{2\tau Q_0}{\Gamma C}+\left(\frac{\delta k}{\Gamma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{7.56}$$

și

$$C_1=\frac{\beta}{\Gamma}+\left\{\frac{2\tau Q_0}{\Gamma C}+\left(\frac{\delta k}{\Gamma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Înlocuind în ecuația (7.55) această valoare pentru C_1, rezultă constanta de timp

$$\alpha=\frac{\Gamma}{2\bar{t}}\left[\frac{\beta}{\Gamma}+\left\{\frac{2\tau Q_0}{\Gamma C}+\left(\frac{\delta k}{\Gamma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^2 \tag{7.57}$$

și puterea maximă

$$Q_{max}=\frac{C\Gamma}{2\bar{t}}\left[\frac{\beta}{\Gamma}+\left\{\frac{2\tau Q_0}{\Gamma C}+\left(\frac{\delta k}{\Gamma}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^2. \tag{7.58}$$

Constanta φ nu poate fi determinată din ecuațiile de mai sus, dar trebuia să fie obținută din condițiile inițiale. Deoarece soluțiile alese pentru ecuațiile diferențiale nu se aplică pentru $t=0$ ci sînt valabile numai pentru ultimele etape nu putem să-l determinăm pe φ.

Scanned with OKEN Scanner

În final considerăm următorul exemplu:

Un reactor omogen cu grafit (cu masa de 40 t) are capacitatea calorică $C=0{,}8\times10^4$ kcal/°C şi

$$\bar{l}=10^{-3}\ \text{s}$$

$$\Gamma=10^{-4}/°\text{C}$$

$$\delta k=0{,}02$$

$$Q_0=100\ \text{MW}=24\times10^4\ \text{kcal/s}.$$

Din aceasta, cu ajutorul ecuaţiilor de determinare de mai sus, rezultă

$$\frac{1}{\alpha}=0{,}07\ \text{s}$$

$$\frac{Q_0}{C}=3°\text{C/s}$$

$$Q_{max}=1{,}3\times10^5\ \text{MW}$$

$$T_\infty=414°\text{C}.$$

Astfel, procesul are loc în aproximativ o zecime de secundă. Este evident că elementele combustibile nu pot suporta un şoc de temperatură de cîteva sute de grade într-un timp atît de scurt şi sînt distruse de o supraîncălzire atît de bruscă.

(Ar fi de subliniat că în interiorul reactorului avem de-a face cu o explozie termică şi aceasta nu trebuie confundată cu o explozie atomică.) Rezultatul acestui paragraf se poate rezuma astfel:

Stabilitatea unui reactor depinde de puterea sa specifică; cu cît puterea specifică este mai mică, cu atît reactorul este mai puţin sensibil la variaţii bruşte de reactivitate.

Este important ca elementele combustibile să suporte o creştere bruscă a temperaturii; reactivitatea este foarte repede anulată de temperatura ridicată, şi reactorul revine la timp într-o stare staţionară; el poate fi repornit dacă elementele combustibile au suportat şocul de temperatură.

5. Variaţii de densitate ale agentului de transfer al căldurii

Căldura este extrasă dintr-un reactor cu ajutorul apei sau a altui lichid de răcire sau cu ajutorul unui gaz de răcire. Densitatea acestui mediu de răcire se poate schimba. De exemplu, la reactorii răciţi cu

Scanned with OKEN Scanner

gaz este posibil ca o parte a gazului de răcire să scape; lichidele de răcire se pot în parte evapora; în cazul unei avarii apa sau aerul pot pătrunde în zona activă. În fiecare caz reactivitatea se va schimba.

Această schimbare de reactivitate are două efecte:

1°. Toţi agenţii de răcire absorb neutroni, astfel că o schimbare a densităţii lor este urmată de o modificare a absorbţiei de neutroni.

2°. Toate aceste substanţe au un efect de încetinire asupra neutronilor, astfel că raportul dintre numărul de neutroni rapizi şi lenţi se schimbă.

Schimbările în reactivitate ce apar din schimbările în absorbţia de neutroni sînt arătate mai jos. Conform ecuaţiei (2.109), factorul f modificat de substanţele considerate aici este

$$f_0 = \frac{\Sigma_u}{\Sigma_u + \Sigma_m}$$

(f — fracţiunea de neutroni absorbiţi de către materialul fisionabil).

Dacă adăugăm secţiunea de absorbţie $\delta\Sigma_a^*$ a substanţelor contaminante (gaz sau lichid de răcire), atunci obţinem

$$f = \frac{\Sigma_u}{\Sigma_u + \Sigma_m + \delta\Sigma_a^*} = \frac{\Sigma_u}{\Sigma_u + \Sigma_m} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{\delta\Sigma_a^*}{\Sigma_u + \Sigma_m}\right)}. \tag{7.59}$$

Deoarece modificarea este foarte mică, f poate fi dezvoltat în serie de puteri ale lui $\delta\Sigma_a^*/(\Sigma_u + \Sigma_m)$. Luînd în consideraţie numai puterea întîi din dezvoltare, avem

$$f = f_0\left\{1 - (1 - f_0)\frac{\delta\Sigma_a^*}{\Sigma_m}\right\}, \tag{7.60}$$

Similar, factorul p pentru probabilitatea de evitare a rezonanţei trebuie corectat (vezi ecuaţia (2.107))

$$p_0 = \exp\left(-\frac{\Sigma_{rez}}{\Sigma_s \zeta}\right).$$

Contaminarea dă o secţiune macroscopică de împrăştiere adiţională $\delta\Sigma_s^*$ şi ζ^* corespunzător, iar factorul p devine

$$p = \exp\left[\frac{-\Sigma_{rez}}{\zeta\Sigma_s + \delta(\zeta^*\Sigma_s^*)}\right] = \exp\left[\frac{-\Sigma_{rez}}{\zeta\Sigma_s(1 + \delta\zeta_s^*\Sigma_s^*)/\zeta\Sigma_s)}\right]. \tag{7.61}$$

Dezvoltînd în serie de puteri după $\delta(\zeta^*\Sigma_s^*)/\zeta\Sigma_s$ şi considerînd numai prima putere obţinem

$$p = \exp\left[\frac{-\Sigma_{rez}}{\zeta\Sigma_s}\left(1 - \frac{\delta(\zeta^*\Sigma_s^*)}{\zeta\Sigma_s}\right)\right] = p_0\left[1 + (1 - p_0)\frac{\delta(\zeta^*\Sigma_s^*)}{\zeta\Sigma_s}\right] \tag{7.62}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu aproximaţia

$$1-p_0=\frac{\Sigma_{rez}}{\zeta\Sigma_s}.$$

Atît schimbarea de absorbţie, $\delta\Sigma_a$ cît şi de putere de moderare a unui reactor, pot fi negative cît şi pozitive, producînd schimbări corespunzătoare ale reactivităţii.

Valoarea schimbării de reactivitate, conform ecuaţiilor (7.60) şi (7.62), este

$$\frac{\delta k}{k_0}=-(1-f_0)\frac{\delta\Sigma_a}{\Sigma_m}+(1-p_0)\frac{\delta(\zeta^*\Sigma_s^*)}{\zeta\Sigma_s}. \qquad (7.63)$$

Aceste consideraţii sînt importante pentru securitatea unui reactor. De exemplu un reactor cu grafit submoderat, adică cu $(1-f_0)\ll\ll(1-p_0)$, în care a pătruns apa, poate duce la o creştere importantă de reactivitate, deoarece $\zeta_{H_2O}=1$ şi $\zeta_C=0{,}158$. Într-un reactor supramoderat, va apare întotdeauna o micşorare a reactivităţii.

Exemplu: într-un reactor cu grafit pătrund vapori de apă.

$f_0=0{,}9$

$p_0=0{,}9$

$\sigma_{am}=5\times10^{-3}$b (secţiunea microscopică de absorbţie)

$\sigma_{sm}=4{,}8$ b (secţiunea microscopică de împrăştiere)

$\sigma_{aH_2O}=0{,}33$ b

$\sigma_{sH_2O}=30$ b

$N_{H_2O}=45\times6\times10^{23}/m^3=2{,}7\times10^{19}/cm^3$ (1 atm)

$N_{grafit}=0{,}8\times10^{23}/cm^3$

$\Sigma_{am}=4\times10^4/cm$

$\Sigma_{aH_2O}=1{,}8\times10^5/cm$

$\zeta\Sigma_{sm}=0{,}062/cm$

$\zeta\Sigma_{sH_2O}=1{,}6\times10^{-3}/cm.$

Reactivitatea se schimbă cu

$$\frac{\delta k}{k_0}=-4{,}5\times10^{-3}+0{,}26\times10^{-3}=-1{,}9\times10^{-3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul VIII

OTRĂVIREA UNUI REACTOR

În timpul funcționării unui reactor, apar un număr de nuclee ușoare (cu masa atomică între 80 și 160) ca produse de fisiune, ale fisiunii nucleelor grele. Ele influențează funcționarea unui reactor pe cinci căi diferite:

1°. Preiau energia de fisiune eliberată imediat după fisiune sub formă de energie cinetică a produselor de fisiune; acestea sînt încetinite în rețeaua cristalină a materialelor reactorului, iar energia rețelei este transformată în căldură.

2°. Transportă neutronii întîrziați a căror influență asupra comportării dinamice a reacției în lanț a fost descrisă în capitolul precedent.

3°. Perturbează în timpul procesului de încetinire, menționat mai sus, rețeaua cristalină, ajungînd uneori la distrugerea completă a acesteia.

4°. Sînt radioactive și contaminează mediul înconjurător; prin urmare, reactorul trebuie bine ecranat la exterior în scopul protejării personalului și a utilităților înconjurătoare.

5°. Multe din aceste produse de fisiune au o secțiune de absorbție mare pentru neutronii termici și deci efecte puternice asupra economiei de neutroni.

Ne vom ocupa mai jos de acest ultim efect numit „otrăvire".

Tabelul 8.1. arată produsele de fisiune care contribuie semnificativ la otrăvire, precum și secțiunea lor de absorbție, timpul de înjumătățire și contribuția lor per fisiune.

Primul grup conține toate produsele de fisiune cu o secțiune de absorbție mare ($\sigma > 10^4$ barni). Al doilea grup conține izotopii cu secțiuni de captură între 100 și 500 barni. Randamentele de fisiune corespunzătoare sînt arătate în partea dreaptă a tabelului. Sînt cunoscute și alte grupe de produse de fisiune cu secțiuni de absorbție între 19 și 100 barni (9 specii nucleare) sau între 5 și 10 barni (8 specii nucleare),

Scanned with OKEN Scanner

care datorită slabei lor influenţe asupra reacţiei în lanţ nu au fost cuprinse în tabel.

Tabelul 8.1.

	Secţiunea de fisiune, b	Timpul de înjumătăţire pentru		Randament de fisiune, %		
		Izotop	Nuclid precursor	U^{233}	U^{235}	Pu^{239}
Grupa I						
Xe^{135}	$3{,}4\times10^6$	9,2 h	6,7 h	6,6	6,4	5,3
Sm^{149}	$6{,}6\times10^4$	stabil	50 h	0,7	1,15	1,8
Sm^{151}	$1{,}2\times10^4$	80 ani	27 h	0,5	0,73	1,98
Cd^{113}	$2{,}5\times10^4$	stabil	5,3 h	0,02	0,011	0,075
Eu^{155}	$1{,}4\times10^4$	stabil	23 min	0,015	0,031	0,22
Grupa II						
Eu^{153}	420	stabil	47 h	0,1	0,15	0,8
Kr^{183}	205	stabil	2,3 h	1,2	0,54	0,05
In^{115}	197	stabil	54 h 43 d	0,02	0,01	0,05
Nd^{143}	300	stabil	13,8 d	5,1	5,9	6,0

Toate aceste produse de fisiune, cu excepţia samariului-151 şi xenonului-135, sînt stabile, adică $\lambda=0$; Xenonul ocupă un loc special prin aceea că are timpul de înjumătăţire relativ scurt, (9,2 ore). Pe de altă parte samariul, cu timpul de înjumătăţire de 80 ani poate fi cu o aproximaţie destul de bună considerat stabil, deoarece timpul său de înjumătăţire este foarte mare în comparaţie cu timpul de ardere al elementelor de combustibil.

Otrăvirea cu Xe^{135}

Produsele de fisiune cu numărul de masă 135 aparţin următoarei serii de dezintegrare

$$Te^{135} \xrightarrow{2\ min} I^{135} \xrightarrow{6{,}7\ h} Xe^{135} \xrightarrow{9{,}2\ h} Cs^{135} \xrightarrow{2\times10^6\ a} Ba^{135}.$$

Elementele se dezintegrează unul din altul prin dezintegrări beta; numerele de deasupra săgeţilor arată în fiecare caz timpul de înjumătăţire. Transformarea din telur în iod apare atît de repede (timpul de înjumătăţire =2 minute) că în practică se poate presupune că iodul se formează direct la fisiune cu un randament de fisiune corespunzător mai mare.

Dacă concentraţia iodului-135 se notează prin X_1, secţiunea de absorbţie prin σ_1, constanta de dezintegrare prin λ_1 şi randamentul de fisiune prin γ_1, atunci viteza de variaţie a concentraţiei de I^{135} este

$$\frac{dX_1}{dt}=\gamma_1\Sigma_f\Phi-\sigma_1\Phi X_1-\lambda_1X_1. \qquad (8.1)$$

Primul termen reprezintă randamentul de fisiune per cm^3 și secundă; al doilea viteza de dispariție a nucleelor de I^{135} prin captură de neutroni pe cm^3 și secundă și al treilea termen pierderea de I^{135} datorită dezintegrării beta. Al doilea termen este mic în comparație cu al treilea și poate fi neglijat.

Soluția ecuației (8.1) este

$$X_1 = \frac{\gamma_1 \Sigma_f \Phi}{\lambda_1} (1 - \exp(-\lambda_1 t)). \tag{8.2}$$

După aproximativ doi-trei timpi de înjumătățire se atinge concentrația de saturație $X_{1\infty}$ a I^{135}. Ea este

$$X_{1\infty} = \frac{\gamma_1 \Sigma_f \Phi}{\lambda_1}. \tag{8.3}$$

Pentru concentrația Xe^{135} obținem în mod analog cu ecuația (8.1)

$$\frac{dX_2}{dt} = \gamma_2 \Sigma_f \Phi + \lambda_1 X_1 - \sigma_2 X_2 \Phi - \lambda_2 X_2. \tag{8.4}$$

A fost adăugat termenul $\lambda_1 X_1$, care reprezintă numărul de tranziții beta pe cm^3 și secundă de la I^{135} la Xe^{135}. Pentru concentrația de saturație a Xe^{135} obținem, analog cu ecuația (8.3), din (8.4)

$$X_{2\infty} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) \Sigma_f \Phi}{\sigma_2 \Phi + \lambda_2}. \tag{8.5}$$

În general, otrăvire se numește mărimea

$$P = \frac{\sigma_x X}{\Sigma_f} \tag{8.6}$$

(σ_x — secțiunea de absorbție a produsului de fisiune de concentrație X).

Otrăvirea cu Xe este deci

$$P = (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\sigma_2 \Phi}{\sigma_2 \Phi + \lambda_2}. \tag{8.7}$$

Pentru fluxuri mici de neutroni

$$P \approx (\gamma_1 + \gamma_2) \sigma_2 \Phi / \lambda_2.$$

Pentru fluxuri Φ mari

$$P \approx (\gamma_1 + \gamma_2) = 0{,}059.$$

Tabelul următor arată variația otrăvirii cu Xe^{135} cu fluxul de neutroni.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 8.2.

$\Phi/cm^2 \cdot s$	10^{11}	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}
P	$0{,}9\times10^{-3}$	$8{,}3\times10^{-3}$	$3{,}65\times10^{-2}$	$5{,}6\times10^{-2}$	$5{,}9\times10^{-2}$

Separat de pierderea de neutroni prin absorbție în nucleele de Xe^{135}, descrisă mai sus, există un alt fenomen neplăcut produs de Xe: acest efect apare după oprirea reactorului. În acest caz nucleele de Xe^{135} continuă să fie produse prin dezintegrarea beta a nucleelor de I^{135}, dar nucleele de Xe^{135} nu mai sînt distruse în continuare prin captură de neutroni. Astfel, are loc o creștere considerabilă a cantității de Xe^{135}, și după cîteva ore otrăvirea atinge un astfel de nivel încît reactorul nu mai poate fi pornit.

Din ecuațiile (8.1) și (8.4) concentrațiile xenonului și iodului, după oprirea reactorului (adică pentru $\Phi=0$), sînt

$$X_1=X_{10}\exp(-\lambda_1 t) \tag{8.7}$$

și

$$X_2=\left\{\frac{\gamma_1}{\lambda_2-\lambda_1}(\exp[-\lambda_1 t]-\exp[-\lambda_2 t])+\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{\lambda_2+\sigma_2\Phi_0}\exp[-\lambda_2 t]\right\}\Sigma_f\Phi. \tag{8.9}$$

Această funcție are un maximum la timpul $t=10$ ore. Cu $\gamma_1=0{,}056$ și $\gamma_2=0{,}003$, constantele respective de dezintegrare $\lambda_1=2{,}9\times10^{-5}/s$ și $\lambda_2=2{,}1\times10^{-5}/s$ și secțiunea de absorbție $\sigma_2=3{,}5\times10^{-18}$, rezultatul otrăvirii reprezintă o pierdere echivalentă de reactivitate de cca 40%. Pornirea reactorului în această situație este imposibilă. Xe^{135} format are un timp de înjumătățire de 9,2 ore și prin urmare după 20—30 ore el s-a dezintegrat în așa măsură, încît reactorul poate fi din nou pornit.

Un fenomen similar apare la schimbarea încărcării, dacă fluxul de neutroni scade pentru un timp și este apoi mărit din nou. „Funcționarea de rutină" a unui reactor poate fi totuși aranjată astfel ca otrăvirea cu xenon să nu împiedice lucrul. Diagrama de încărcare uzuală a unei centrale de putere, cu putere variabilă în perioade de 8—10 ore, poate fi ajustată față de perioada de producție și de dezintegrare a xenonului astfel ca în orice moment să fie accesibilă reactivitatea necesară, fără oprirea reactorului, ci totdeauna cu o reducere a puterii de 30—40%. Timpii de dezintegrare ai Xe^{135} (9,2 ore) și I^{135} (6,7 ore) dau o perioadă de 10—12 ore.

Procesul se poate descrie și în următorul mod: otrăvirea cu xenon suferă o „deplasare de fază" de 90°, astfel că la o funcționare în plin

Scanned with OKEN Scanner

otrăvirea cu xenon este mică; la o putere mică, pe de altă parte, ea este mare.

Aceste fenomene, care sînt legate de influența dependenței de temperatură a puterii, asupra reactivității, pot fi descrise numai cu ajutorul unor ecuații, matematice complicate ce pot fi rezolvate folosind calculatoare electronice analogice.

Otrăvirea cu produse de fisiune stabile

Otrăvirea cu produse de fisiune stabile, citate în tabelul 8.1, poate fi stabilită în modul următor: ecuația (8.1) este valabilă și pentru precursorii din seriile de dezintegrare ale produselor de fisiune considerate, componenta de absorbție, $-\sigma_1 \Phi X_1$, fiind în toate cazurile neglijabilă, în comparație cu componenta de dezintegrare, astfel că

$$\frac{dX_1}{dt} = \gamma_1 \Sigma_f \Phi - \lambda_1 X_1. \tag{8.10}$$

Soluția este

$$X_1 = \frac{\gamma_1 \Sigma_f \Phi}{\lambda_1} (1 - \exp[-\lambda_1 t]) \tag{8.11}$$

Analiza tabelului 8.1, al produselor de fisiune, arată că timpii de înjumătățire ai precursorilor produselor de fisiune cu secțiune de absorbție mare sînt mici în comparație cu timpul de ardere a elementelor combustibile. Se poate deci presupune că se atinge o concentrație de echilibru. Ecuația (8.11)

$$X_{1\infty} = \frac{\gamma_1 \Sigma_f \Phi}{\lambda_1}. \tag{8.12}$$

Analog ecuației (8.4), obținem pentru modificarea concentrației produselor de fisiune otrăvitoare ecuația

$$\frac{dX_2}{dt} = \gamma_2 \Sigma_f \Phi + \lambda_1 X_1 - \sigma_2 \Phi X_2. \tag{8.13}$$

Se presupune aici că toate produsele de fisiune considerate sînt stabile ($\lambda_2 = 0$). Soluția ecuației (8.13), cu valoarea lui X_1 din ecuația (8.11), este

$$X_2 = (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\Sigma_f}{\sigma_2} (1 - \exp[-\sigma_2 \Phi t]). \tag{8.14}$$

Otrăvirea corespunzătoare este

$$P = \gamma (1 - \exp[-\sigma_2 \Phi t]) \tag{8.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$; γ este randamentul de fisiune dat în tabelul 8.1, pentru produsul de fisiune respectiv.

Astfel, otrăvirea cu un produs particular de fisiune poate fi reprezentată cu ajutorul unei funcţii exponenţiale simple.

Cantitatea $1/\sigma_2\Phi$ este constanta de timp, τ, pentru efectul de otrăvire în fiecare caz. Să comparăm acest timp cu timpul luat pentru o transformare completă a materialului fisionabil. Totuşi, să ţinem constantă concentraţia de combustibil, pe calea unui proces de reproducere (vezi capitolul următor) sau prin adăugarea de combustibil. Atunci

$$N\sigma_f(1+\alpha)\Phi t \tag{8.16}$$

este numărul de atomi fisionabili per cm^3 consumaţi în timpul t la o concentraţie N de material fisionabil şi un flux de neutroni Φ. $\sigma_a=\sigma_f(1+\alpha)$ este secţiunea totală de absorbţie a combustibilului. Dacă combustibilul este transformat atunci numărul de atomi consumaţi este egal cu concentraţia de combustibil N

$$N\sigma_f(1+\alpha)\Phi t=N. \tag{8.17}$$

Rezultă că durata unei transformări de combustibil este

$$t=\frac{1}{\Phi\sigma_f(1+\alpha)}. \tag{8.18}$$

Să comparăm această perioadă de timp cu timpul τ, în care, conform ecuaţiei (8.15), otrăvirea a crescut la valoarea $P=\gamma(1-e^{-1})=0{,}632\gamma$

$$\tau=\frac{1}{\sigma_2\Phi} \quad \text{sau} \quad \sigma_2\Phi\tau=1. \tag{8.19}$$

Raportul acestor două perioade este

$$\frac{t}{\tau}=\frac{\sigma_2}{\sigma_f(1+\alpha)}. \tag{8.20}$$

Pentru U^{233} de exemplu $\sigma_f(1+\alpha)=581$ barni.

Dacă considerăm în tabelul 8.1 primul grup de produse de fisiune, a căror secţiune de absorbţie este mai mare de 10^4 barni, atunci

$$\frac{t}{\tau}>17{,}2 \text{ sau } t>17{,}2\tau. \tag{8.21}$$

Rezultă din aceasta că otrăvirea cu produse de fisiune creşte cel puţin de 17 ori mai repede decît durata de ardere a combustibilului. În practică se poate admite acest tip de otrăvire de la început şi adăuga

Scanned with OKEN Scanner

cantităţile corespunzătoare din grupa I a tabelului la otrăvirea cu xenon. Această cantitate adiţională este, conform tabelului,

$$P_{tot}=0{,}01235 \text{ pentru } U^{233}.$$

Consideraţii asemănătoare, pentru al doilea grup de produse de fisiune din tabel, arată că otrăvirea semnificativă apare de 2 sau 3 ori mai încet decît este consumat combustibilul. O atenţie particulară se acordă produsului Nd^{143} care are un randament de fisiune relativ ridicat.

Toate celelalte grupuri cu secţiuni de absorbţie mai mici de 100 barni dau o contribuţie semnificativă numai după perioade de cca 6 ori mai lungi decît timpul de ardere. Practic, influenţa lor poate fi ignorată pentru gradul de utilizare a combustibilului atins astăzi.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IX

PROBLEME DE REPRODUCERE ŞI CONVERSIE

1. Procese de reproducere şi conversie

La fisionarea nucleelor grele se eliberează, în medie, mai mult de doi neutroni. Pentru a menţine relaţia în lanţ este necesar numai unul din aceşti neutroni. Astfel se poate pierde pe fisiune mai mult de un neutron.

Dacă se introduce într-un reactor o substanţă convenabilă (de exemplu U^{238} sau Th^{232}), atunci neutronii în exces pot fi absorbiţi de aceste nuclee transformîndu-le într-un material fisionabil. Acest proces este numit „reproducere", iar substanţele din care se obţine noul material fisionabil sînt cunoscute ca „materiale fertile". Se vorbeşte în mod obişnuit despre un proces de reproducere cînd izotopul fisionabil apărut şi combustibilul fisionabil sînt unul şi acelaşi; producerea unei substanţe, alta decît combustibilul din reactor, este numită conversie. Această posibilitate de cîştig simultan de energie şi de combustibil nou este de mare importanţă pentru economia centralelor de putere.

Următorul tabel dă numărul de neutroni cedaţi per neutron termic pentru nucleele fisionabile cunoscute:

Tipul de nucleu	U^{235}	U^{233}	Pu^{239}
η	$2{,}08 \pm 0{,}02$	$2{,}31 \pm 0{,}03$	$2{,}03 \pm 0{,}03$

Pentru fiecare nucleu capturat de material fisionabil, sînt eliberaţi η neutroni rapizi (vezi capitolul I). U^{233} se vede a fi cel mai potrivit pentru producţia de nou material fisionabil, deoarece este disponibil un exces de 1,31 neutroni.

Izotopii fisionabili Pu^{239} şi U^{233} sînt produşi prin adăugarea unui neutron la izotopii fertili U^{238} şi respectiv Th^{232}. Este deci posibil ca în locul tuturor pierderilor de neutroni (vezi capitolul 2) să se poată produce tot atîta material fisionabil sau chiar mai mult, aşa cum s-a văzut mai sus.

Să examinăm transmutaţia mai îndeaproape. Prin captura unui neutron U^{238} trece în primul rînd în U^{239}, care la rîndul său se transformă în Pu^{239} printr-o dublă dezintegrare beta

$$U^{238}+n \rightarrow U^{239} \xrightarrow[23{,}5\ \text{min}]{\beta} Np^{239} \xrightarrow[2{,}33\ \text{d}]{\beta} Pu^{239}.$$

Unele din nucleele produse astfel, cu numărul de masă 239, sînt pierdute, deoarece Np^{239}, avînd o secţiune de absorbţie de aproximativ 60 barni, poate de asemenea să absoarbă neutroni fiind trasformat în Np^{240}. Deoarece ultimul izotop şi succesorii săi nu sînt fisionabili, transmutaţia în Np^{240} reprezintă o pierdere naturală de neutroni. Conversia U^{239} în U^{240} este improbabilă şi practic nesemnificativă.

Notăm concentraţia nucleelor de Np^{239} prin N_p; $\lambda_{Np}\ N_p$ este numărul de nuclee transformate în Pu^{239} prin dezintegrare beta; în acelaşi timp, $\sigma_{N_p} N_p \Phi$ nuclee de Np se transformă în Np^{240}.

Fracţiunea de nuclee de Np care se dezintegrează este, prin urmare,

$$r = \frac{\lambda_{Np} N_p}{\lambda_{Np} N_p + \sigma_{Np} N_p \Phi} = \frac{\lambda_{Np}}{\lambda_{Np} + \sigma_{Np} \Phi}. \qquad (9.1)$$

În scopul de a ne forma o imagine a mărimii acestei pierderi considerăm următorul exemplu

$$\Phi = 10^{14}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}, \quad \sigma_{Np} = 60 \times 10^{-24}\ \text{cm}^2,$$

$$\lambda_{Np} = 3{,}5 \times 10^{-6}/\text{s}.$$

Atunci $r = 0{,}998$. Astfel pierderea este neglijabilă.

Transmutaţia Th^{232} în U^{233} are loc în următoarele etape

$$Th^{232}+n \rightarrow Th^{233} \xrightarrow[23{,}3\ \text{min}]{\beta} Pa^{233} \xrightarrow[27{,}4\ \text{d}]{\beta} U^{233}.$$

Aici, de asemenea, trebuie să se considere o pierdere. Pa^{233} are o secţiune de captură pentru neutroni de aproximativ 68 barni şi se transformă în izotopul Pa^{234}. Deoarece protactiniul are un timp de înjumătăţire de 27,4 zile, probabilitatea de reacţie este, corespunzător, mare.

Pentru pierderea de aici, este valabilă de asemenea ecuaţia (9.1). Pentru a ilustra aceasta să dăm un exemplu şi pentru acest caz

$$\Phi = 10^{14}/\text{cm}^2 \cdot \text{s}, \ \lambda_{Pa} = 3 \times 10^{-7}/\text{s}, \ \sigma_{Pa} = 68 \times 10^{-24}\ \text{cm}^2$$

iar $r = 0{,}977$. Factorul de pierdere este astfel atît de mic încît nu ne propunem să-l luăm în consideraţie, în discuţia următoare.

Scanned with OKEN Scanner

Indicele de productivitate la formarea de nou material fisionabil este factorul de conversie sau de reproducere. El este egal cu raportul dintre cantitatea de material fisionabil nou format și cantitatea de material fisionabil consumată.

Atît neutronii rapizi, cît și cei termici, pot fi capturați în combustibil.

Dacă Σ_b este secțiunea macroscopică medie de absorbție a materialului fertil pentru neutroni termici și Φ este fluxul de neutroni, atunci sînt capturați pe cm³ și secundă un număr de $\Sigma_b\Phi$ neutroni de acest tip. Acest număr dă în același timp viteza de formare a nucleelor fisionabile noi, produse pe această cale.

Pe de altă parte, numărul de neutroni rapizi capturați în materialul fertil pentru a forma noul material fisionabil este $\nu\Sigma_f\varepsilon\Phi P_f(1-p)$. Aici $\nu\Sigma_f\Phi\varepsilon$ este numărul de neutroni rapizi produși pe cm³ și secundă. P_f este probabilitatea de evitare a scurgerii pentru neutronii rapizi (vezi capitolul 2); dacă se înmulțește această cantitate cu numărul de neutroni produși, atunci se obține numărul total de neutroni rapizi ce rămîn în reactor, din care o fracțiune $(1-p)$ sînt capturați în materialul fertil.

Din contră, pierderea de combustibil este dată de $(\Sigma_f+\Sigma\gamma)\,\Phi$. ($\Sigma_\gamma$ — secțiunea macroscopică de absorbție pentru captura radiativă a neutronilor; Σ_f — secțiunea macroscopică de fisiune a combustibilului). Formăm raportul dintre cantitatea de material fisionabil cîștigat și cantitatea de material fisionabil pierdut prin ardere și obținem factorul de conversie sau reproducere

$$C=\frac{\Sigma_b\Phi+\nu\Sigma_f\varepsilon\Phi P_f(1-p)}{\Sigma_f(1+\alpha)\Phi}=\frac{\Sigma_b}{\Sigma_f(1+\alpha)}+\frac{\nu\varepsilon P_f(1-p)}{(1+\alpha)}. \qquad (9.2)$$

Mărimea $\alpha=\Sigma_\gamma/\Sigma_f$ a fost introdusă în capitolul 2.

Bilanțul neutronilor termici poate fi descris în modul următor

$$\nu\Sigma_f\varepsilon P_f p\Phi=\{\Sigma_f(1+\alpha)+\Sigma_b+\Sigma_m(1+B^2L_m^2)+\Sigma_v\}\Phi. \qquad (9.3)$$

Partea stîngă a ecuației (9.3) reprezintă numărul de neutroni termici produși pe cm³ și secundă, prin fisiune și încetinire. Termenii din partea dreaptă a egalității reprezintă pierderea de neutroni prin absorbție pe cm³ și secundă, în nucleele fisionabile, $\Sigma_f(1+\alpha)$, în nuclee fertile Σ_b, în moderator Σ_m și în produse de fisiune otrăvitoare Σ_v; componenta $\Sigma_m B^2L_m^2$ reprezintă scurgerea neutronilor termici din moderator.

Această reprezentare este identică cu condiția de criticitate $k_{ef}=1$ și poate fi obținută din ecuația (2.155) după simple transformări algebrice.

Scanned with OKEN Scanner

Împărţirea ecuaţiei (9.3) prin $\Sigma_f(1+\alpha)\Phi$ dă

$$\frac{\nu\varepsilon P_f p}{(1+\alpha)} = 1 + \frac{\Sigma_b}{\Sigma_f(1+\alpha)} + \frac{\Sigma_m(1+B^2L_m^2)}{\Sigma_f(1+\alpha)} + \frac{\Sigma_v}{\Sigma_f(1+\alpha)}. \qquad (9.4)$$

Această relaţie introdusă în ecuaţia (9.2) dă pentru factorul de conversie sau reproducere termică expresia

$$C = \frac{\nu\varepsilon P_f}{(1+\alpha)} - 1 - \frac{\Sigma_m(1+B^2L_m^2)}{\Sigma_f(1+\alpha)} - \frac{\Sigma_v}{\Sigma_f(1+\alpha)} =$$

$$= \eta\varepsilon P_f - 1 - \frac{\Sigma_m(1+B^2L_m^2)}{\Sigma_f(1+\alpha)} - \frac{\Sigma_v}{\Sigma_f(1+\alpha)}. \qquad (9.5)$$

Deducerea ecuaţiei (9.5) este valabilă, strict vorbind, numai pentru reactorul omogen; ea este totuşi aplicabilă şi reactorilor eterogeni dacă secţiunea de absorbţie corespunzătoare este înmulţită cu fluxurile medii de neutroni pentru diferite medii fizice (vezi capitolul 4).

Expresia pentru factorul de conversie în ecuaţia (9.5) nu va mai conţine în continuare cantitatea p. Aceasta înseamnă că formarea noului material fisionabil este independentă de spectrul neutronilor (distribuţia energetică a neutronilor) şi depinde numai de probabilitatea de evitare a scurgerii neutronilor rapizi P_f şi de diferite secţiuni de absorbţie. Cu creşterea arderii combustibilului, factorul de conversie C devine mai mic datorită creşterii cantităţii de produse de fisiune — otrăvuri — (vezi capitolul 8).

În reactorii submoderaţi sau în reactori rapizi, termenii din partea dreaptă a ecuaţiei (9.5) se modifică considerabil la creşterea energiei medii a neutronului. Pentru materialele fisionabile cunoscute α are tendinţa de a se micşora (după cîteva fluctuaţii) cînd energia medie a neutronului creşte. Factorul de multiplicare pentru producţia de neutroni rapizi din materialul fertil cu neutroni rapizi devine de asemenea mai mare. Al treilea termen din ecuaţia (9.5), care dă absorbţia în moderator, devine mai mic la creşterea puterii de moderare. Ultimul termen poate fi de asemenea făcut mai mic în aceste circumstanţe. Rezultatul este că reactorii rapizi au, în particular, o bună economie a materialului fisionabil şi se poate obţine un raport de reproducere mai mare decît unitatea.

Domeniul de energie dintre neutronii termici şi rapizi este numit regiune de energie intermediară. Pentru neutronii intermediari nu a fost încă evaluat randamentul proceselor de reproducere şi conversie. Captura neutronilor intermediari de către produsele de fisiune otrăvitoare, pare totuşi a fi atît de nefavorabilă încît în această regiune economia de neutroni este în foarte slabă.

Scanned with OKEN Scanner

2. Influenţa concentraţiei de material reproducător şi fisionabil asupra proceselor de reproducere sau conversie

Secţiunea macroscopică de absorbţie, dată în ecuaţia (9.5), variază considerabil în timpul procesului de reproducere cu concentraţia individuală a materialului din reactor. Să considerăm în primul rînd *procesul de reproducere*. Aici avem ciclul U^{233}-Th^{232} şi ciclul Pu^{239}-U^{238}. Să notăm cu X concentraţia materialului fisionabil (U^{233} sau Pu^{239}) şi cu Y concentraţia materialului fertil. Secţiunile de reacţie vor fi indiciate corespunzător. Viteza de variaţie a concentraţiei materialului fisionabil este dată de

$$\frac{dX}{dt} = \{\Sigma_y^a \Phi + \nu\varepsilon \Sigma_x^f P_f (1-p)\Phi\} - \Sigma_x^a \Phi =$$

$$= \{\sigma_y^a Y + \nu\varepsilon P_f X(1-p)\sigma_x^f\}\Phi - X\sigma_x^a \Phi. \qquad (9.6)$$

Aceasta este o combinaţie a următoarelor cantităţi variabile în timp:

— creşterea cantităţii de material fisionabil prin captura neutronului termic în materialul fertil;

— creşterea cantităţii de material fisionabil prin captura neutronului rapid în materialul fertil;

— consumul de material fisionabil prin captură cu şi fără fisiune.

Separat, pentru variaţia concentraţiei de material fisionabil din ecuaţia (9.6) se poate obţine o ecuaţie pentru variaţia concentraţiei de material fertil. Pentru toate scopurile practice se poate totuşi presupune că materialul fertil rămîne de concentraţie constantă datorită secţiunii sale de absorbţie mici.

Pentru a interpreta ecuaţia (9.6) adăugăm în ambele părţi cantitatea $\Sigma_x^a \Phi$ şi apoi împărţim prin aceeaşi cantitate.

O comparare cu ecuaţia (9.2) ne dă

$$\frac{dX/dt}{\Sigma_x^a \Phi} + 1 = C \qquad (9.7)$$

sau

$$\frac{dX/dt}{\Sigma_x^a \Phi} = C - 1. \qquad (9.8)$$

Variaţia concentraţiei de material fisionabil raportată la consumul de material fisionabil este atunci mai mare sau mai mică decît zero după cum factorul de conversie este mai mare sau mai mic decît 1.

Ecuaţia (9.6) poate fi acum rezolvată. Punem

$$\nu\varepsilon P_f (1-p)\sigma_x^f - \sigma_x^a = -\sigma^*; \qquad (9.9)$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci

$$\frac{dX}{dt} = \sigma_y^a Y\Phi - \sigma^* X\Phi. \tag{9.10}$$

Dacă X_0 este concentraţia iniţială atunci soluţia este

$$X = \frac{\sigma_y^a}{\sigma^*} Y[1 - \exp(-\sigma^*\Phi t)] + X_0 \exp(-\sigma^*\Phi t). \tag{9.11}$$

După cîtva timp, respectiv după aproximativ $3/\sigma^*\Phi$ secunde, X atinge valoarea de saturaţie

$$X_\infty = \frac{\sigma_y^a}{\sigma^*} Y. \tag{9.12}$$

După cum concentraţia iniţială este mai mare sau mai mică decît concentraţia de saturaţie curba pentru concentraţia de material fisionabil descreşte sau creşte (vezi fig. 9.1).

Este interesant de analizat dacă în cazul $X(0) = X_\infty = \text{const.}$ un reactor poate fi ţinut critic. În această situaţie analizăm un proces adevărat de reproducere, adică reactorul ar produce exact atît material fisionabil cît ar consuma; ar fi necesar numai să se completeze cantitatea de material fertil pentru ca reactorul să fie menţinut continuu în funcţiune.

În scopul de a verifica această posibilitate, relaţia se introduce (9.12) în ecuaţia critică (vezi ecuaţia (9.4)). Aceasta este posibil, deoarece Σ_v creşte cu timpul, astfel că se poate introduce o valoare medie estimată

$$\frac{\nu\varepsilon P_f p}{1+\alpha} = 1 + \frac{\nu P_f \varepsilon p - \nu\varepsilon P_f + (1+\alpha)}{(1+\alpha)} + \frac{\Sigma_m(1+B^2L_m^2)+\Sigma_v}{\Sigma_f(1+\alpha)} \tag{9.13}$$

sau

$$\frac{\nu\varepsilon P_f}{1+\alpha} = 2 + \frac{\Sigma_m(1+B^2L_m^2)+\Sigma_v}{\Sigma_f(1+\alpha)} \tag{9.14}$$

sau, în sfîrşit,

$$\nu\varepsilon P_f = 2(1+\alpha) + \frac{\Sigma_m(1+B^2L_m^2)+\Sigma_v}{\Sigma_f}.$$

Acest rezultat înseamnă că, în afară de cei doi neutroni ceruţi pentru menţinerea reacţiei în lanţ şi pentru reproducere, o anumită

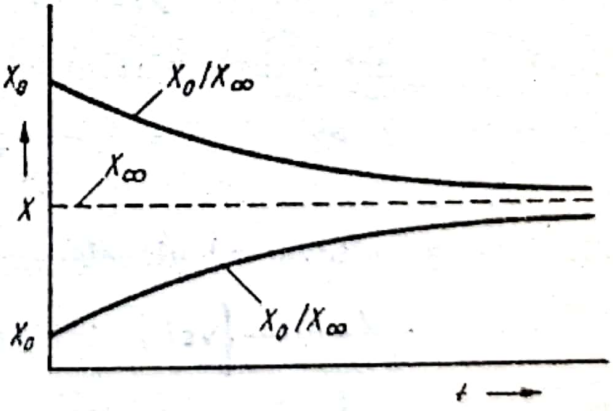


Fig. 9.1. Variaţia raportului dintre concentraţia de material fisionabil şi concentraţia de saturaţie, în raport cu timpul.

Scanned with OKEN Scanner

fracţiune de neutroni trebuie să fie disponibilă pe fisiune pentru absorbţie în materialele structurale ale reactorului (Σ_m), scurgere de neutroni termici şi pierdere datorită otrăvirii. Această condiţie poate fi satisfăcută, chiar şi cu cel mai bun material fisionabil termic U^{233}, numai dacă scurgerea de neutroni termici şi rapizi este menţinută la un nivel foarte scăzut. O scurgere de neutroni mică implică în mod corespunzător reactori de dimensiuni mari.

Prin urmare, pare mai economic să se sacrifice un factor de reproducere mare şi să se construiască reactori mici cu o densitate mare de putere ale căror costuri de construcţie sînt mai mici decît acelea ale reactorilor mari. Este necesar atunci să se reîmprospăteze continuu materialul fisionabil consumat.

Să estimăm viteza de adăugare a combustibilului.

În ecuaţia (9.10) introducem un termen de combustibil care să arate ce cantitate de material fisionabil pe cm^3 şi secundă trebuie să fie adăugat în scopul menţinerii reactorului în stare de funcţionare, cum s-a arătat conform ecuaţiei (9.13), cantitatea de material fisionabil trebuind să fie menţinută constantă.

Influenţa otrăvurilor va fi reprezentată cu suficientă precizie printr-o componentă estimată ca fiind constantă. Din ecuaţia (9.10) obţinem

$$\frac{dX}{dt} = \sigma_y^a Y\Phi - \sigma^* X\Phi + Q = 0 \tag{9.15}$$

şi de aici

$$\sigma_y^a Y\Phi = \sigma^* X\Phi - Q. \tag{9.16}$$

Dacă această expresie este introdusă în ecuaţia (9.3), atunci rezultă

$$\{\nu\varepsilon P_f p - (1+\alpha)\}\Sigma_f\Phi = (\sigma^* X\Phi - Q) + \Sigma_m(1+B^2L_m^2)\Phi + \Sigma_v\Phi =$$

$$= [\sigma_x^a - \nu\varepsilon P_f(1-p)\sigma_x^f]X\Phi - Q + \Sigma_m(1+B^2L_m^2)\Phi + \Sigma_v\Phi. \tag{9.17}$$

Dacă se împart ambele părţi prin $\Sigma_f\Phi$ şi se pune

$$\frac{\Sigma_x^f}{\Sigma_x^a} = \frac{1}{1+\alpha}$$

atunci după cîteva calcule algebrice simple se obţine

$$\frac{Q}{\Sigma_f\Phi} = -\left\{\nu\varepsilon P_f - 2(1+\alpha) - \frac{\Sigma_m}{\Sigma_f}(1+B^2L_m^2) - \frac{\Sigma_v}{\Sigma_f}\right\}. \tag{9.18}$$

Dacă punem din nou $\Sigma_f = \Sigma_x^a/(1+\alpha)$ rezultă

$$\frac{Q}{\Sigma_x^a\Phi} = -\frac{1}{(1+\alpha)}\left\{\nu\varepsilon P_f - 2(1+\alpha) - \frac{\Sigma_m}{\Sigma_f}(1+B^2L_m^2) - \frac{\Sigma_v}{\Sigma_f}\right\}. \tag{9.19}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta reprezintă fracțiunea de material fisionabil care trebuie să fie continuu înlocuit.

Să calculăm cantitatea de material fisionabil operațional (care poate asigura o funcționare continuă) de exemplu pentru un ciclu Th-U.

Într-un reactor cu grafit cu diametrul de 3 m, cu înălțime de 3 m și cu un reflector de protecție de 0,5 m avem:

$\alpha=0{,}09$, densitatea medie a grafitului $=1$ g/cm^3

$$L_m=0{,}8 \text{ m}, \quad \tau=890 \text{ cm}^2$$

$$\varepsilon=1{,}02, \quad \nu=2{,}5$$

$\frac{\Sigma_v}{\Sigma_f}=0{,}10$; la fiecare 1 000 kg grafit fie că există 4 kg U^{233}.

Se obțin următoarele valori

$$P_f=0{,}83, \qquad \frac{\Sigma_m}{\Sigma_f}=0{,}038, \qquad B^2L_m^2=1{,}3.$$

Fracțiunea de material fisionabil care trebuie continuu înlocuită este, pentru acest exemplu,

$$\frac{Q}{\Sigma_x^a\Phi}=-0{,}817.$$

Dacă această fracțiune este calculată pentru reactori reproducător de U-Th, cu o putere de 200—500 MW, atunci se obțin valori între 0,05 și 0,25.

Cerința reală este puțin mai mare (adesea aproximativ cu 0,05), deoarece pentru estimarea de mai sus s-au făcut anumite aproximări, pentru simplificarea calculului.

În cazul ciclului plutoniu-uraniu condițiile sînt mult mai nefavorabile.

Raționamentul exact va fi dat mai jos, unde vom folosi din nou ecuația (9.10) și presupunem un termen sursă Q pentru materialul fisionabil

$$\frac{dX}{dt}=\Sigma_y\Phi-\sigma^*X\Phi+Q \tag{9.20}$$

și, conform ecuației (9.3),

$$[\nu\varepsilon P_f p-(1+\alpha)]\sigma_f X=\Sigma_y+\Sigma_m(1+B^2L_m^2)+\Sigma_v. \tag{9.21}$$

Să facem două substituții

$$R=[\nu\varepsilon P_f p-(1+\alpha)]\sigma_f \quad \text{și} \quad \Sigma=\Sigma_y+\Sigma_m(1+B^2L_m^2)+\Sigma_v. \tag{9.22}$$

Din ecuația (9.21)

$$RX=\Sigma \quad \text{și} \quad X=\frac{\Sigma}{R}, \text{ astfel că } \frac{dX}{dt}=\frac{1}{R}\frac{d\Sigma}{dt}. \tag{9.23}$$

Înlocuind această ecuație în (9.21), se obține pentru Q

$$Q=\frac{1}{R}\frac{d\Sigma}{dt}+\sigma^{*}\Phi\frac{\Sigma}{R}-\Sigma_y\Phi. \tag{9.24}$$

Împărțind prin

$$\sigma_x^a X\Phi=\sigma_x^a\frac{\Sigma}{R}\Phi$$

obținem cantitatea necesară ce trebuie înlocuită

$$\frac{Q}{\sigma_x^a\Phi X}=\frac{1}{\sigma_x^a\Phi\Sigma}\frac{d\Sigma}{dt}+\frac{\sigma^{*}}{\sigma_x^a}-\frac{R}{\sigma_x^a}\frac{\Sigma_y}{\Sigma}=\frac{1}{\sigma_x^a\Phi\Sigma}\frac{d\Sigma}{dt}+$$

$$+\left[1-\eta P_f\varepsilon(1-p)-(\eta P_f p\varepsilon-1)\frac{\Sigma_y}{\Sigma}\right]. \tag{9.25}$$

Primul termen reprezintă cantitatea de material fisionabil necesară pentru a compensa pierderile ce apar datorită otrăvirii.

Să considerăm acum procesele de conversie.

Vom utiliza de asemenea ipoteza că concentrația de material fertil este constantă, ipoteză suficient de precisă pentru scopuri practice. Materialul fisionabil primar de concentrație X_1 este transmutat prin captura neutronului. Schimbarea de concentrație poate fi reprezentată simplu prin

$$\frac{dX_1}{dt}=-\sigma_1^a X_1\Phi. \tag{9.26}$$

Materialul fisionabil secundar se formează prin captura neutronilor rapizi și termici în materialul fertil. După formarea sa, acesta participă la reacția în lanț, adică o parte din noul material fisionabil va fi consumat prin captură de neutroni.

Viteza de creștere a concentrației de material fisionabil secundar este dată de

$$\frac{dX_2}{dt}=\Sigma_y\Phi+(\nu_1\sigma_1^f X_1+\nu_2\sigma_2^f X_2)\varepsilon(1-p)P_f\Phi-\sigma_2^a X_2\Phi. \tag{9.27}$$

Dacă se compară această ecuație cu ecuația corespunzătoare procesului de reproducere (9.6) se vede că numai noul termen reprezintă componenta pentru captura neutronilor rapizi în materialul fertil, care ia în considerație viteza de formare a materialului fisionabil secundar din materialul fisionabil primar.

Scanned with OKEN Scanner

Soluția ecuației (9.26) este

$$X_1 = X_{10} \exp(-\sigma_1^a \Phi t). \tag{9.28}$$

În scopul simplificării ecuației (9.27) folosim următoarele substituții

$$\begin{aligned} -\nu_2 \sigma_2^f \varepsilon (1-p) P_f + \sigma_2^a &= \sigma_2^* \\ \nu_1 \sigma_1^f \varepsilon (1-p) P_f &= \sigma_1^*. \end{aligned} \tag{9.29}$$

Din ecuațiile (9.27) și (9.28) avem

$$\frac{dX_2}{dt} = \Sigma_y \Phi + \sigma_1^* X_{10} \Phi \exp(-\sigma_1^a \Phi t) - \sigma_2^* X_2 \Phi. \tag{9.30}$$

Cu condiția inițială $X_2(0)=0$ soluția ecuației (9.30) este

$$X_2 = \frac{\Sigma_y}{\sigma_2^*} [1 - \exp(-\sigma_2^* \Phi t)] + \frac{\sigma_1^* X_{10}}{\sigma_1^a - \sigma_1^*} [\exp(-\sigma_2^* \Phi t) - \exp(-\sigma_1^a \Phi t)] \tag{9.31}$$

așa cum se poate arăta, prin substituție în ecuația (9.30).

Figura 9.2 arată forma curbelor pentru funcțiile $X_1(t)$ și $X_2(t)$. Din

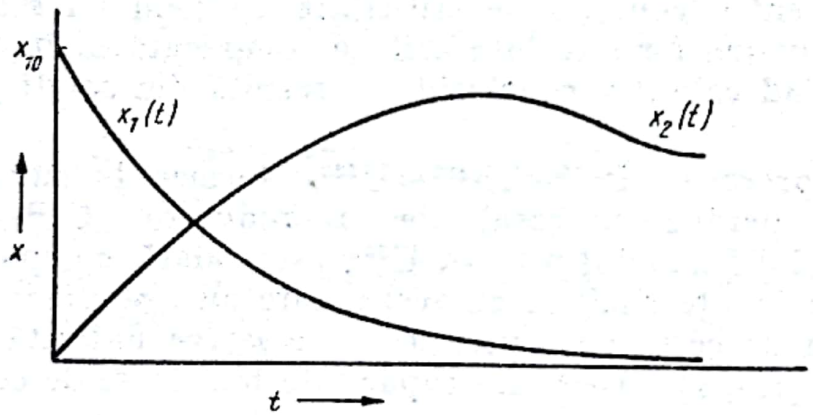


Fig. 9.2. Acumularea de material fisionabil în procesul de conversie.

acest grafic vedem că valorile pentru X_1 scad exponențial în timp ce pentru X_2 ele cresc la început atingînd un maxim, iar după aceea se apropie asimptotic de valoarea

$$X_2(\infty) = \frac{\Sigma_y}{\sigma_2^*}. \tag{9.32}$$

Se pune întrebarea dacă un reactor poate deveni critic pentru această valoare (vezi ecuația (9.4)). Într-un proces de conversie de acest tip, un reactor ar trece din regiunea de conversie în regiunea de reproducere

Scanned with OKEN Scanner

și atunci ar putea continua să funcționeze ca un reactor reproducător fără a fi alimentat cu material fisionabil.

Să vedem dacă această operație este posibilă, înlocuind ecuația (9.32) în ecuația de criticitate a unui reactor, ecuația (9.4). Obținem o expresie ca și în ecuația (9.14). Găsim, totuși, că condiția este practic imposibil de îndeplinit. Astfel, un reactor termic nu poate trece de la o conversie simplă la reproducere, nici chiar în cazul procesului favorabil conversiei $U^{235} \rightarrow Th^{232} \rightarrow U^{233}$.

Atît pentru procesul de conversie cît și pentru procesul de reproducere, este necesară adăugarea continuă de material fisionabil proaspăt. Această problemă poate fi rezolvată pornind cu o concentrație foarte mare de material fisionabil primar și compensînd la început excesul de reactivitate cu ajutorul barelor de control. Metoda are dezavantajul că sînt pierduți mulți neutroni prin absorbție în barele de control. Este mult mai economic să se prevadă completarea continuă cu combustibil, dacă aceasta se poate realiza din punct de vedere tehnic.

Ca și în cazul reacției pure de reproducere, poate fi stabilită o funcție sursă de material fisionabil și pentru tranziția din procesul de conversie în procesul de reproducere. Introducem componenta de sursă Q în ecuația (9.26). Împreună cu ecuația (9.30) și cu ecuația corespunzătoare pentru condiția de criticitate obținem un set complet de ecuații. Rezolvarea lor este însă atît de complicată încît nu va fi dată aici. Exprimînd calitativ concluziile ce rezultă din soluție, ele sînt următoarele:

Pentru procesul $U^{235} \rightarrow Th^{232} \rightarrow U^{233}$, termenul sursă este mai mare decît pentru procesul de reproducere $U^{233} \rightarrow Th^{232} \rightarrow U^{233}$. Dacă materialul fisionabil primar, U^{235} este odată complet consumat, rezultă circumstanțe similare cu acelea care au fost descrise în ecuația (9.19) pentru procesul de reproducere, deoarece datorită valorii mari a lui η ($\eta = \nu/(1+\alpha)$), U^{233} are capacitate mai mare de cedare de neutroni.

Chiar dacă o descriere riguroasă este prea complexă pentru cadrul acestei cărți, totuși vom calcula cantitatea de combustibil cu care trebuie alimentat reactorul pentru un caz simplu:

1°. pierderile prin otrăvire sînt compensate (de exemplu prin deplasarea barelor de absorbție);

2°. a fost atinsă o stare staționară pentru întregul proces.

Revenim la ecuațiile (9.26), (9.27) și completăm ecuația (9.26) cu termenul de sursă Q

$$\frac{dX_1}{dt} = -\sigma_1^a \Phi X_1 + Q \qquad (9.33)$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$\frac{dX_2}{dt} = \Sigma_y \Phi + \sigma_1^* X_1 \Phi - \sigma_2^* X_2 \Phi. \tag{9.34}$$

Definițiile lui σ_1^* și σ_2^* sînt date de ecuația (9.29). Adăugăm acum condiția de criticitate

$$R_1 X_1 + R_2 X_2 = \Sigma \tag{9.35}$$

în care Σ este dat de ecuația (9.22). Cantitățile R_1 și R_2 sînt definite de

$$\begin{aligned} R_1 &= [\nu_1 \varepsilon P_f p - (1+\alpha_1)]\sigma_1^f \\ R_2 &= [\nu_2 \varepsilon P_f p - (1+\alpha_2)]\sigma_2^f. \end{aligned} \tag{9.36}$$

Pentru cazul stării de echilibru și cu compensarea otrăvirii, Σ_v și Σ sînt presupuse constante. În plus

$$\frac{dX_1}{dt} = -\sigma_1^a \Phi X_1 + Q = 0 \tag{9.37}$$

și

$$\frac{dX_2}{dt} = \Sigma_y \Phi + \sigma_1^* \Phi X_1 - \sigma_2^* \Phi X_2 = 0. \tag{9.38}$$

Din ecuațiile (9.35) și (9.37), concentrațiile de material fisionabil X_1 și X_2 pot fi stabilite ca fiind

$$X_1 = \frac{\sigma_2^* \Sigma - R_2 \Sigma_y}{R_1 \sigma_2^* + R_2 \sigma_1^*}, \qquad X_2 = \frac{\sigma_1^* \Sigma + R_1 \Sigma_y}{R_1 \sigma_1^* + R_2 \sigma_1^*}. \tag{9.39}$$

Fracțiunea de material fisionabil consumat care trebuie completată este dată de raportul dintre masa adăugată de material fisionabil Q și materialul fisionabil consumat $\sigma_1^a \Phi X_1 + \sigma_2^a \Phi X_2$ care este

$$\frac{Q}{\sigma_1^a \Phi X_1 + \sigma_2^a \Phi X_2} = \frac{\sigma_1^a X_1}{\sigma_1^a X_1 + \sigma_2^a X_2} = \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma_2^a (\sigma_1^* \Sigma + R_1 \Sigma_y)}{\sigma_1^a (\sigma_2^* \Sigma - R_2 \Sigma_y)}}. \tag{9.40}$$

Transformăm fracția cu ajutorul ecuațiilor (9.29) și (9.36). Mai mult, luăm în considerație faptul că $\eta = \nu/(1+\alpha)$. Atunci obținem

$$\frac{Q}{\sigma_1^a \Phi X_1 + \sigma_2^a \Phi X_2} = \frac{1 - \eta_2 P_f \varepsilon (1-p) - (\eta_2 \varepsilon P\ p - 1)\Sigma_y/\Sigma}{1 + (\eta_1 - \eta_2)\varepsilon P_f (1-p) + (\eta_1 - \eta_2)\varepsilon P_f p \Sigma_y/\Sigma}. \tag{9.41}$$

În final să considerăm un exemplu. Într-un reactor tipic de conversie

$$p = 0{,}90 \qquad \varepsilon = 1{,}03 \qquad P_f = 0{,}93$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\Sigma_v}{\Sigma}=0{,}67 \qquad \eta_1=2{,}08 \qquad \eta_2=2{,}30.$$

Atunci în ipotezele făcute mai sus, fracțiunea de material fisionabil ce trebuie adăugat este $\dfrac{Q}{\sigma_1^a \Phi X_1+\sigma_2^a \Phi X_2}=0{,}135.$

3. Procesele de conversie cu uraniu natural și îmbogățit

În tehnologia nucleară, U^{235} este materialul fisionabil cel mai frecvent folosit. Procesele de conversie utilizate în acest caz implică de cele mai multe ori sistemul de trei izotopi $U^{235} \rightarrow U^{238} \rightarrow Pu^{239}$.

Dacă U^{235} este accesibil ca uraniu natural, atunci reactorii sînt moderați fie cu grafit, fie cu apă grea. În ambele tipuri de reactori este inevitabil un aranjament eterogen al combustibilului, pentru a se putea atinge o constantă de multiplicare k_{ef} suficient de mare.

Reactorii moderați cu grafit, cu uraniu natural ca combustibil (în general denumiți „reactori Calder Hall"), au dimensiuni mari. Ei au o zonă activă cubică sau cilindrică de 8—12 m diametru. Datorită acestor dimensiuni mari, pierderile prin scăpări ale neutronilor termici și rapizi sînt menținute mici.

De asemenea, pierderile datorite otrăvirii cu produse de fisiune sînt mici datorită faptului că densitatea de putere — și în consecință fluxul de neutroni — sînt mici ($\Phi \approx 10^{12}/\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}$). Astfel, materialul fisionabil este relativ puțin utilizat. Prin urmare, factorul de conversie (vezi ecuația (9.5)) este mare pentru acest tip de reactor.

Pentru un reactor cu grafit, care este încărcat cu 2 000 t de grafit și 1 000 t de uraniu natural, se obține un factor de conversie mai mare de 0,9 la o otrăvire medie de $\Sigma_c/\Sigma_f(1+\alpha)=0{,}05$ conform ecuației (9.5), presupunînd că $P_f=1$, ceea ce corespunde realității.

În cazul reactorului cu apă grea condițiile sînt mai favorabile: datorită dimensiunilor mai mici ale acestor reactori pierderea de neutroni prin scurgere din reactor este mai mare, dar această pierdere este compensată de o secțiune de absorbție mică a neutronilor de către apa grea.

Desigur otrăvirea $\Sigma_c/\Sigma_f(1+\alpha)$ este mai mare în cazul reactorilor cu D_2O decît în cazul reactorilor cu grafit, deoarece densitatea lor de putere este mai mare. Se ating aici, pentru reactorii cu putere de ieșire mare, factori de conversie care se situează în jurul valorii 0,9.

Dacă drept combustibil este folosit uraniu îmbogățit, pierderea de neutroni este relativ mare datorită faptului că zona activă este mică.

Scanned with OKEN Scanner

Densitatea de putere foarte mare dă naştere la o otrăvire puternică. La astfel de reactori, deci, condiţiile de conversie nu sînt favorabile.

Pentru a înţelege mai bine procesul de conversie, să adăugăm unele consideraţii calitative.

În primul rînd ne interesează asimptota curbei pentru concentraţia X_2 (vezi fig. 9.2), raportată la valoarea iniţială a materialului fisionabil primar X_{10}. Ea este o măsură a procesului de conversie

$$\frac{X_2(\infty)}{X_{10}} = \frac{Y\sigma_y}{X_{10}\sigma_2^*} = \frac{Y}{X_{10}}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_2^a}\,\frac{1}{1-\tau_{/2}\varepsilon P_f(1-p)}. \qquad (9.42)$$

Primul factor Y/X_{10} reprezintă îmbogăţirea combustibilului; al doilea (σ_y/σ_2^a) este o constantă; al treilea este dependent de probabilitatea p de evitare a rezonanţei. Conform acestei formule, o îmbogăţire mare a combustibilului înseamnă de la început o valoare neconvenabilă a lui $X_2(\infty)/X_{10}$. Este adevărat că la o îmbogăţire mare se poate menţine o probabilitate p de evitare a rezonanţei destul de mică, dar condiţia de criticitate a reactorului trebuie să rămînă îndeplinită, astfel că domeniul în care p poate fi variat este foarte limitat.

O îmbogăţire mare în U^{235} conduce întotdeauna la un factor de conversie mic.

În tabelul de mai jos se dau valorile lui $X_2(\infty)/X_{10}$ pentru cîteva grade de îmbogăţire şi pentru diferite valori ale lui p:

p	$X_2(\infty)/X_{10}$		
	Îmbogăţire 0,715%	1%	2%
0,95	0,41	0,29	0,145
0,9	0,46	0,33	0,165
0,85	0,52	0,37	0,185

Aceste rezultate arată că, de exemplu, la reactorul de tip Calder Hall ($p \approx 0{,}90$ şi îmbogăţirea de 0,715%) din fiecare kg de uraniu natural folosit se pot obţine cel mult 3,3 g Pu.

Dacă conţinutul de U^{235} este mărit la două procente (adică 20 g de uraniu fisionabil la 1 kg de uraniu natural) atunci se obţin cel mult 3,7 g de plutoniu din 20 g material fisionabil; aceasta este posibil numai dacă p poate fi făcut egal cu 0,85.

Urmează să se stabilească poziţia maximului curbei X_2 care se referă la concentraţia iniţială de material fisionabil primar X_{10}. Din ecuaţia (9.31) obţinem

$$\frac{X_2}{X_{10}} = \frac{Y}{X_{10}}\,\frac{\sigma_y}{\sigma_2^*}[1-\exp(-\sigma^*\Phi t)] + \frac{\sigma_1^*}{\sigma_1^a-\sigma^*_2}[\exp(-\sigma_1^*\Phi t)-\exp(-\sigma_1^a\Phi t)]. \qquad (9.43)$$

Scanned with OKEN Scanner

Diferențiem această funcție în raport cu (Φt) și punem $X_2/X_{10}=0$; prin aceasta se obține „doza" $(\Phi t)_{max}$ pentru care funcția X_2/X_{10} are un maxim

$$(\Phi t)_{max}=\frac{1}{\sigma_2^*-\sigma_1^a}\ln\left[\frac{\Sigma_{y0}(\sigma_2^*-\sigma_1^a)}{\Sigma_{X_{10}}\sigma_1^*}+\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^a}\right]. \tag{9.44}$$

În tabelul următor sînt arătate valorile maxime pentru Φt în cazul uraniului natural și îmbogățit cu $p=0{,}9$, $P_f=0{,}93$ și $\varepsilon=1{,}03$. Atunci maximul lui X_2/X_{10} este atins cu atît mai repede cu cît este mai mare concentrația de combustibil fisionabil. O comparație cu gradul de ardere al combustibilului, atins astăzi (de exemplu în cazul uraniului natural), arată că aceste valori maxime nu sînt atinse.

Îmbogățire %	0,715	1%	2%
$(\Phi t)_{max}$	$3{,}7\times10^{21}$	$3{,}0\times10^{21}$	$2{,}0\times10^{21}/cm^2$

În cazul combustibilului uraniu natural se atinge un grad de ardere de 3 000—6 000 MWd/t, ceea ce corespunde la o doză $(\Phi t)_{max}$ de 0,8—$-1{,}6\times10^{21}/cm^2$. Astfel, chiar cu un grad de ardere de 6 000 MWd/t se atinge mai puțin de jumătate din doza care este necesară pentru a da concentrația maximă de material fisionabil secundar.

Dacă înlocuim valorile de mai sus pentru doză în ecuația concentrației materialului fisionabil — ecuația (9.43) — atunci obținem o imagine clară a maximului ce poate fi atins pentru concentrația relativă de material fisionabil secundar.

În tabelul următor sînt comparate aceste maxime pentru diferite concentrații ale materialului fisionabil cu valorile concentrațiilor relative asimptotice $p=0{,}9$, $P_f=0{,}93$ și $\varepsilon=1{,}03$.

Îmbogățire %	0,715	1	2
$(X_2/X_{10})_{max}$	0,47	0,34	0,19
$X_2(\infty)/X_{10}$	0,46	0,33	0,165

Acest tabel arată că concentrația maximă a combustibilului este numai cu puțin deasupra valorii asimptotice pentru concentrație, dacă sînt atinse valori mari pentru (Φt).

Scanned with OKEN Scanner

În regiunea dozelor mai mici, poate apare un efect care are o semnificaţie particulară, dacă este folosit ca combustibil în reactor uraniu natural. Deoarece comparativ cu U^{235}, plutoniul are o secţiune de absorbţie mare, reactivitatea unui reactor de conversie poate creşte după un anumit timp de funcţionare peste valoarea sa iniţială, în cazul unei probabilităţi mici de evitare a rezonanţei.

Pentru a examina această problemă, considerăm din nou ecuaţia de criticitate (9.35). Substituim pentru R_1 şi R_2 valorile definite în ecuaţia (9.36), şi obţinem

$$(\eta_1 P_f \varepsilon p - 1)\sigma_1^a X_1 + (\eta_2 P_f \varepsilon p - 1)\sigma_2^a X_2 = \Sigma_y + \Sigma_m(1 + B^2 L_m^2) + \Sigma_v \quad (9.45)$$

La începutul funcţionării ($t=0$) ecuaţia este

$$(\eta_1 P_f \varepsilon p - 1)\sigma_1^a X_{10} = \Sigma_y + \Sigma_m(1 + B^2 L_m^2) + \Sigma_v^0. \quad (9.46)$$

Creşterea sau scăderea relativă a reactivităţii poate fi găsită pe calea egalării expresiilor din partea stîngă a semnului egal al acestor două ecuaţii. Putem presupune că părţile din dreapta ale acestor două ecuaţii diferă foarte puţin, deoarece la un (Φt) mic otrăvirea rămîne practic constantă.

Schimbarea reactivităţii relative, care trebuie să fie compensată cu ajutorul barelor absorbante, este definită ca

$$D = \frac{(\eta_1 P_f \varepsilon p - 1)\sigma_1^a X_1 + (\eta_2 P_f \varepsilon p - 1)\sigma_2^a X_2}{(\eta_1 P_f \varepsilon p - 1) X_{10} \sigma_1^a} = \frac{X_1}{X_{10}} + \frac{R_2 X_2}{R_1 X_{10}} \quad (9.47)$$

în care R_1 şi R_2 reprezintă

$$R_1 = (\eta_1 P_f \varepsilon p - 1)\sigma_1^a \quad \text{şi} \quad R_2 = (\eta_2 P_f \varepsilon p - 1)\sigma_2^a \quad (9.48)$$

Funcţia din ecuaţia (9.47) este reprezentată în figura 9.3. Vedem că reactivitatea ca funcţie de gradul de ardere are un maxim, după care ea scade continuu. Se poate face uz de acest efect. Astfel, în cazul reactorilor de tip Calder Hall, prin ciclarea potrivită a poziţiilor elementelor combustibile afectate de diferite grade de ardere, se obţine o creştere iniţială a reactivităţii ce permite un grad de ardere total mai mare decît s-ar obţine altfel.

Să examinăm în ce circumstanţe poate avea loc o astfel de creştere a reactivităţii şi cît de mare este ea; pentru aceasta, să diferenţiem ecuaţia (9.47) în raport cu Φt. Gradientul curbei în punctul $\Phi t = 0$ este (fig. 9.3)

$$\frac{dD}{d(\Phi t)_0} = \sigma_1^a \left[\frac{R_2}{R_1} \left[\frac{Y \sigma_y}{X_{10} \sigma_1^a} + \eta_1 \varepsilon P_f (1 - p) \right] - 1 \right] \quad (9.49)$$

Fig. 9.4 arată variația lui $dD/d(\Phi t)_0$ la o probabilitate p, de evitare a rezonanței, pentru diferite grade de îmbogățire a combustibilului indicate în unități de σ_1^a.

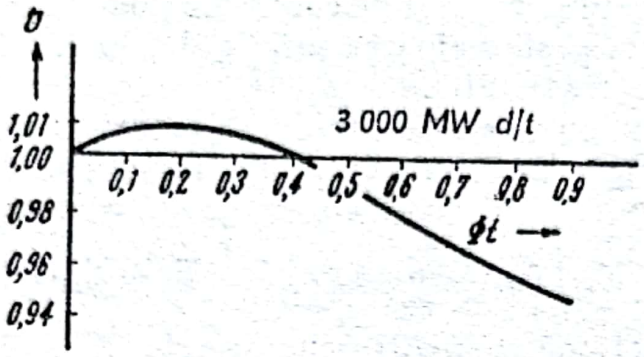


Fig. 9.3. Variația reactivității datorită arderii plutoniului.

Vedem că reactivitatea pentru reactorii cu uraniu natural crește cu condiția ca $p \leqslant 0{,}92$. (Ipoteza $P_f = 0{,}96$, pe care se bazează diagrama, este mai degrabă prea pesimistă pentru tipurile Calder Hall).

Se mai vede că într-un reactor în care procesul de conversie este apreciabil această creștere inițială a reactivității apare numai la o îmbogățire de cel mult un procent; cu îmbogățiri mai mari valorile pentru creșterea curbei în fig. 9.4 devin negative, adică reactivitatea descrește.

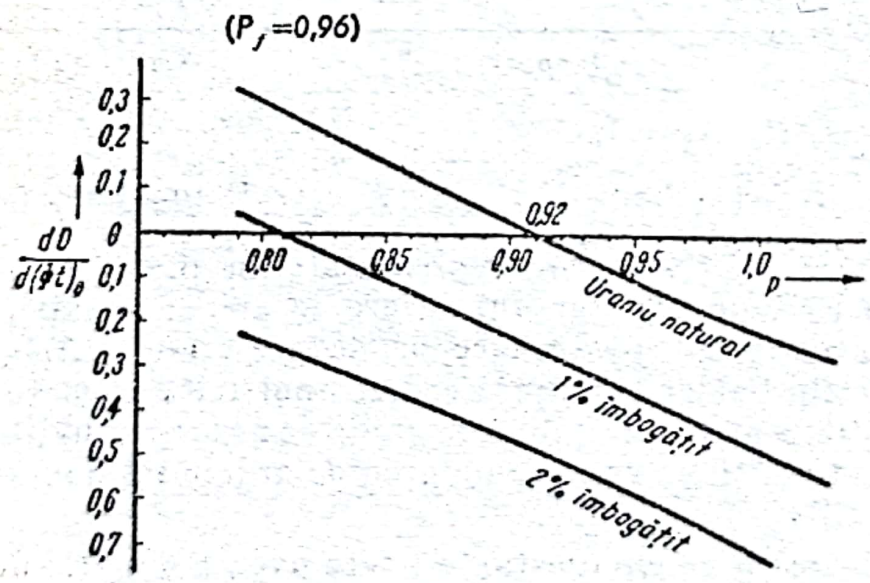


Fig. 9.4. Variația cu p a vitezei inițiale de creștere a reactivității, $dD/d(\Phi t)_0$.

Reactorii cu uraniu natural au o economie de neutroni foarte limitată; aceasta impune anumite condiții speciale pentru construirea unor astfel de centrale.

Scanned with OKEN Scanner

Aceşti reactori trebuie să aibă dimensiuni mari sau trebuie să se folosească numai materiale cu secţiuni de absorbţie a neutronilor foarte mici. Pentru a evita aceste limitări se poate folosi aşa numitul principiu al reciclării plutoniului, conform căruia plutoniul produs în reactori este adăugat elementelor combustibile cu uraniu natural; pe această cale este atinsă o îmbogăţire efectivă ridicată a materialului fisionabil. După o perioadă de ardere, plutoniul este extras din elementele combustibile folosite şi utilizat în noi elemente combustibile. Pe această cale plutoniul este convertit, dar nu consumat, deoarece plutoniul nou este produs din nou din U^{238} pe calea procesului tehnologic de conversie în aceste elemente combustibile. Folosind această metodă obţinem, pe de o parte, toate avantajele folosirii uraniului natural ca material fisionabil, iar pe de altă parte, îmbogăţirea efectivă a combustibilului dă o libertate mai mare în rezolvarea problemelor tehnologice ale reactorilor din centrale.

Procesul descris mai sus pentru reactorii cu plutoniu reciclat va fi în continuare detaliat.

Concentraţia materialului fertil este, practic, constantă (Y=constant). De asemenea, concentraţia materialului fisionabil secundar X_2 este ţinută constantă tot timpul, completarea cu material fisionabil secundar separat chimic fiind păstrată constantă în reactor.

Concentraţia materialului fisionabil primar X_1 este, de asemenea, ţinută la o valoare specifică, uraniul natural consumat fiind sistematic înlocuit cu uraniu proaspăt.

Otrăvirea este menţinută mică pe calea separării chimice frecvente a combustibilului. Ea creşte puţin peste otrăvirea în starea staţionară, datorită produselor de fisiune cu secţiune de absorbţie mare.

Fie m cantitatea de material fisionabil primar introdusă în reactor sub formă de uraniu natural, pe cm³ şi secundă. Dacă combustibilul atinge un grad de ardere $\Phi\tau$, atunci $m\exp(-\sigma_1^a\Phi\tau)$ este cantitatea, pe cm³ şi secundă, care este luată din nou din reactor. Cantitatea totală de material fisionabil primar cu care trebuie alimentat reactorul pe cm³ şi secundă este atunci

$$Q=m(1-\exp[-\sigma_1^a\Phi\tau]). \tag{9.50}$$

Făcînd uz de ecuaţiile (9.33) şi (9.34) obţinem

$$\sigma_1^a\Phi X_1=m(1-\exp[-\sigma_1^a\Phi\tau])=Q \tag{9.51}$$

şi

$$-\sigma_1^*X_1\Phi+\sigma_2^*X_2\Phi=\Sigma_y\Phi. \tag{9.52}$$

De aici

$$X_1=\frac{Q}{\sigma_1^a\Phi} \tag{9.53}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$X_2 = \frac{1}{\sigma_2^* \Phi}\left[\Sigma_y \Phi + \frac{\sigma_1^*}{\sigma_1^a} Q\right]. \tag{9.54}$$

Cantitatea m urmează a fi stabilită mai precis. Dacă elementele de combustibil sînt schimbate după timpul τ, atunci este necesară o anumită cantitate de material fisionabil pe cm³ şi secundă pentru a restabili concentraţia X_{10} iniţială de combustibil primar.

Să considerăm că schimbarea de combustibil se face în întreg reactorul; atunci

$$m = \frac{X_{10}}{\tau} \quad \text{şi} \quad Q = \frac{X_{10}}{\tau}(1 - \exp[-\sigma_1^a \Phi \tau]) \tag{9.55}$$

este cantitatea de material fisionabil primar adăugată pe cm³ şi secundă. Ca şi în ecuaţia (9.47) calculăm schimbarea relativă de reactivitate

$$D = \frac{X_1}{X_{10}} + \frac{R_2}{R_1}\frac{X_2}{X_{10}} = \frac{Q}{X_{10}\sigma_1^a \Phi}\left[1 + \frac{R_2 \sigma_1^*}{R_1 \sigma_2^*}\right] + \frac{R_2}{R_1}\frac{Y\sigma_y}{X_{10}\sigma_2^*} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^* \Phi \tau}[1 - \exp(-\sigma_1^a \Phi \tau)]\left[1 + \frac{R_2 \sigma_1^*}{R_1 \sigma_2^*}\right] + \frac{\Sigma_y \sigma_1^a R_2}{\Sigma_x^a \sigma_2^* R_1}. \tag{9.56}$$

Al doilea termen din prima linie reprezintă schimbarea relativă a reactivităţii datorată influenţei materialului fisionabil secundar. Primul termen descrie schimbarea reactivităţii datorită materialului fisionabil primar, care este dependentă de gradul de ardere a elementelor combustibile schimbate. Se vede uşor că pentru cazul unei utilizări foarte mici a materialului fisionabil primar ($\tau = 0$) această cotă este egală cu 1. Pentru $\tau \to \infty$, acest termen devine mai mic şi în fine dispare complet. Timpul τ de utilizare optimă, prin urmare, trebuie să reprezinte un compromis între creşterea necesară de reactivitate şi costul reproducerii chimice a elementelor combustibile. Un τ mai mare înseamnă un cost mai mic pentru reproducerea combustibilului, iar un τ mai mic înseamnă un spor de reactivitate.

Să cercetăm cu mai multă atenţie factorul de conversie şi să înlocuim în (9.2) expresiile obţinute în ecuaţiile (9.53) — (9.55). Cu substituţiile din ecuaţia (9.29) obţinem rezultatul

$$C = \frac{\dfrac{\Sigma_y}{\Sigma_{X_{10}}^a} + \dfrac{1}{\sigma_1^a \Phi \tau}\{1 - \exp(-\sigma_1^a \Phi \tau)\}\{\eta_1 P_f \varepsilon (1-p)\}}{\dfrac{\Sigma_y}{\Sigma_{X_{10}}^a} + \dfrac{1}{\sigma_1^a \Phi \tau}\{1 - \exp(-\sigma_1^a \Phi \tau)\}\{1 + (\eta_1 - \eta_2)\varepsilon P_f (1-f)\}}. \tag{9.57}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\tau \to \infty$ rezultă cel mai favorabil factor de conversie ($C=1$) care nu se realizează datorită reactivităţii, deoarece în acest caz aceasta scade prea mult. Pentru $\tau \to 0$ se obţine cel mai puţin favorabil factor

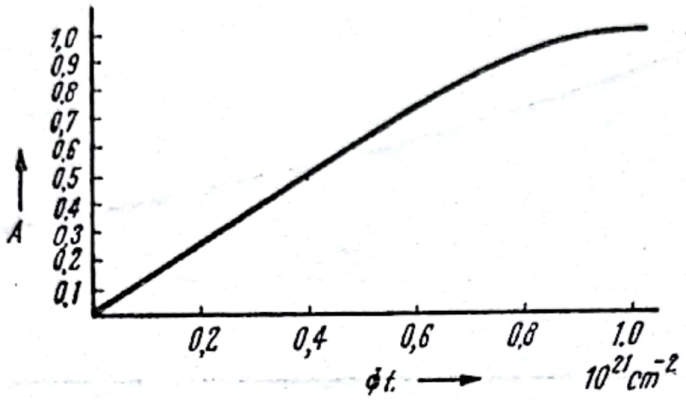


Fig. 9.5. Variaţia utilizării efective A a combustibilului cu Φt pentru sistemul Pu reciclat.

de conversie ($C \approx 0{,}5$). Vom considera un factor de conversie între aceste două extreme, alegînd convenabil valoarea lui τ.

În practică, problema utilizării efective a U^{235} este foarte importantă. Aceasta este dată de raportul U^{235} ars faţă de cantitatea adăugată pe cm^3 şi secundă. Conform ecuaţiilor (9.53)—(9.55) obţinem

$$A = \frac{(\sigma_1^a \Phi X_1 + \sigma_2^a \Phi X_2)\tau}{X_{10}} = \frac{[1-\exp(-\sigma_1^a \Phi \tau)][1+(\eta_1-\eta_2)(1-p)P_f\varepsilon] + \dfrac{\Sigma_y}{\Sigma_{X_{10}}^a}\sigma_1^a \Phi \tau}{1-\eta_2 P_f \varepsilon (1-p)}. \tag{9.58}$$

Figurile 9.5 şi 9.6 arată variaţia cu doza Φt a utilizării efective A şi respectiv a schimbării relative de reactivitate D.

Pentru a fi în măsură să judecăm corect cît de mare poate fi luată doza Φt pentru sistemul de reciclare a plutoniului, trebuie să examinăm dependenţa factorului de multiplicare k_{ef} de Φt. Factorul de multiplicare din fig. 9.7 poate fi atins într-un reactor folosind uraniu natural şi principiul reciclării plutoniului. El este dependent de parametrii constanţi şi variabili ai reactorului cu uraniu natural pe baza următoarelor consideraţii. Să stabilim pentru început constanta efectivă de multiplicare a unui reactor cu uraniu natural

$$k_{ef0} = \frac{\nu_1 \sigma_1^f X_{10} \cdot \varepsilon \cdot P_f \cdot p}{\sigma_1^a X_{10} + \Sigma_y + \Sigma_m(1+B^2 L_m^2) + \Sigma_v}. \tag{9.59}$$

Scanned with OKEN Scanner

La începutul funcționării reactorului, $k_{ef0}=1$. Rezultă în continuare că

$$\nu\sigma_1^f X_{10}\varepsilon P_f p-\sigma_1^a X_{10}=(\eta_1\varepsilon P_f p-1)\sigma_1^a X_{10}=\Sigma_y+\Sigma_m(1+B^2L_m^2)+\Sigma_v. \quad (9.60)$$

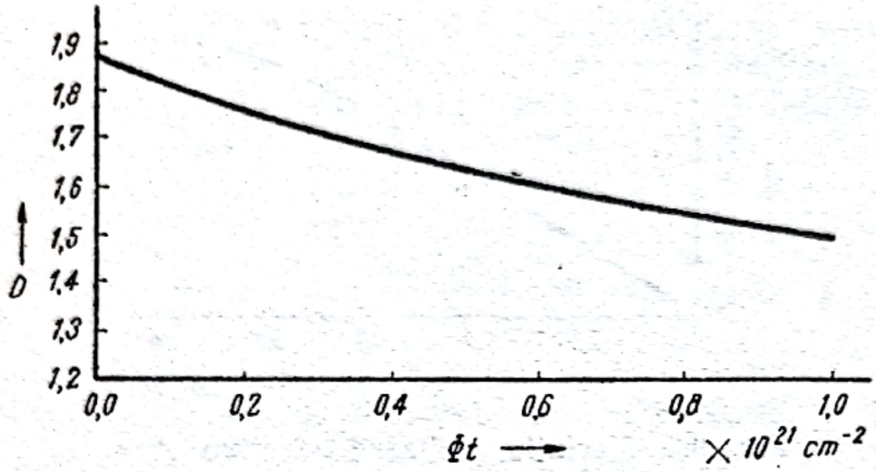


Fig. 9.6. Variația relativă de reactivitate D ca funcție de Φt.

Reactorul cu plutoniu reciclat ar avea același conținut de material fertil și moderator și ar fi de aceleași dimensiuni cu un reactor cu uraniu natural. Cantitatea Σ_v pentru otrăvire, ar fi de asemenea aceeași, în ambele cazuri. Atunci factorul de multiplicare k_{ef} pentru reactorul cu plutoniu reciclat va fi

$$(k_{ef})_{Pu}=\frac{(\nu_1\sigma_1^f X_1+\nu_2\sigma_2^f X_2)P_f\varepsilon p}{\sigma_1^a X_1+\sigma_2^a X_2+\Sigma_y+\Sigma_m(1+B^2L_m^2)+\Sigma_v}. \quad (9.61)$$

Comparăm cei doi factori de multiplicare (pentru reactorul cu uraniu natural și reactorul cu plutoniu reciclat) și stabilim că ultimii trei termeni

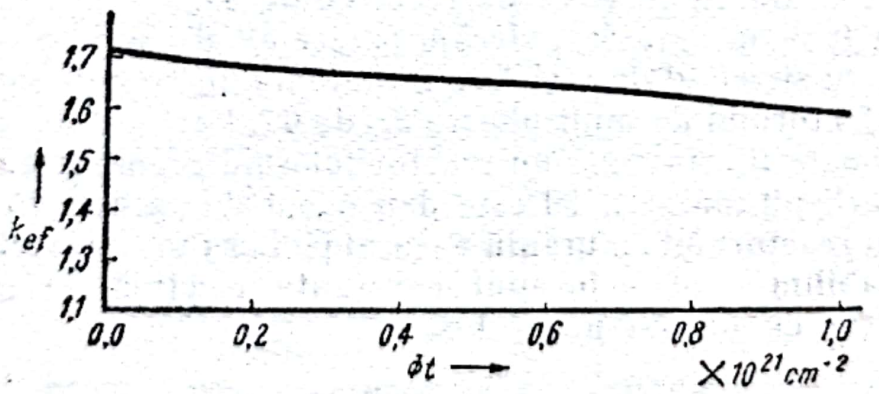


Fig. 9.7. Variația factorului de multiplicare cu doza pentru Pu reciclat.

Scanned with OKEN Scanner

ai numitorului din ecuația (9.61) trebuie să fie egali cu expresia din ecuația (9.60). Deci

$$(k_{ef})_{Pu} = \frac{(\nu_1\sigma_1^f X_1 + \nu_2\sigma_2^f X_2)P_f\varepsilon p}{\sigma_1^a X_1 + \sigma_2^a X_2 + (\eta_1\varepsilon P_f p - 1)\sigma_1^a X_{10}}. \qquad (9.62)$$

Atunci $(k_{ef})_{Pu}$ este factorul de multiplicare ce poate fi atins într-un reactor cu uraniu natural în baza principiului de reciclare a plutoniului. În practică, un reactor cu plutoniu reciclat nu va fi identic cu un reactor cu uraniu natural. Dimensiunile lui vor fi mai mici și, deci, pierderile prin scăpări, B^2L^2, vor fi mai mari, densitatea sa de putere va fi mai mare și, prin urmare, otrăvirea va fi mai mare.

Pentru a compara situația în reactorul cu plutoniu reciclat față de cea din reactorul cu uraniu natural, substituim ecuațiile (9.50)—(9.54) în ecuația (9.62) și se obține următorul rezultat

$$(k_{ef})_{Pu} = \frac{(\eta_1 Dr + \eta_2)P_f p\varepsilon}{1 + Dr - (\eta_1\varepsilon P_f p - 1)(\eta_2\varepsilon P_f(1-p) - 1)r} \qquad (9.63)$$

unde $D = (1 - \exp[-\sigma_1^a\Phi t])/\sigma_1^a\Phi t$ și $r = \Sigma^a_{X_{10}}/\Sigma_y$ și $(\eta_1 - \eta_2)P_f\varepsilon(1-p)$ este neglijabil în comparație cu 1.

O evaluare practică a utilizării combustibilului poate fi obținută, exprimînd doza $\Phi\tau = 10^{21}$ cm^{-2} în MWd/t, care este cea mai uzuală unitate în tehnologia reactorilor.

Numărul de fisiuni pe cm^3 și secundă, la o doză $\Phi\tau$, este

$$N = (X_1\sigma_1^f\Phi\tau + X_2\sigma_2^f\Phi\tau) = X_{10}\left\{\frac{\eta_1}{\nu_1} + \frac{\eta_1\eta_2\varepsilon(1-p)P_f}{\nu_2[1-\eta_2\varepsilon P_f(1-p)]}\right\}[1 - \exp(-\sigma_1^a\Phi\tau)] +$$

$$+ \frac{\eta_2 X_{10}}{\nu_2[1-\eta_2\varepsilon P_f(1-p)]} \cdot \frac{\Sigma_y}{\Sigma_{X_{10}}}\Phi\sigma_1^a\tau. \qquad (9.64)$$

Acum X_{10} este egal cu $L\rho/M_{10}$ (L — numărul lui Avogadro, ρ — densitatea U^{235} și M_{10} — greutatea moleculară a U^{235}, în grame).

Dacă V este volumul unei tone de uraniu, atunci

$$X_{10} \cdot V = L\rho V/M_{10} = L \cdot G/M_{10}$$

(G — greutatea tuturor atomilor de U^{235}, în grame) este numărul total de atomi de U^{235} în uraniu natural.

Cantitatea de căldură cedată de o tonă de uraniu pentru o doză $\Phi\tau$ este atunci

$$E = X_{10}VE_f = \frac{L \cdot G}{M_{10}}\left\{\frac{\eta_1}{\nu_1} + \frac{\eta_1\eta_2\varepsilon P_f(1-p)}{\nu_2[1-\eta_2\varepsilon P_f(1-p)]}\right\}(1 - \exp[-\sigma_1^a\Phi\tau]) +$$

$$+ \frac{\eta_2\Sigma_y\Phi\sigma_1^a\tau}{\nu_2[1-\eta_2 P_f\varepsilon(1-p)]\Sigma^a_{X_{10}}} \qquad (9.65)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $L=6\times10^{23}$, $G=7\,000$ g, $M_{10}=235$ g, $\Phi\tau=10^{21}/cm^{-2}$ şi E_f energia cedată pe fisiune $=3{,}2\times10^{-11}$ joule, obţinem

$$E=6\,400 \text{ MWd.} \tag{9.66}$$

Doza aleasă pentru limita superioară a curbelor (figurile 9.5—9.7) corespunde aici la un exces al gradului de ardere faţă de 6 000 MWd/t pentru un reactor cu plutoniu reciclat folosind uraniu natural.

Principiul reciclării plutoniului este, deci, foarte interesant din punct de vedere tehnic. Cea mai mare dificultate practică este optimizarea unei funcţionări cît mai continue posibil şi necesitatea de schimbare a elementelor combustibile cît mai des posibil. Deoarece funcţionarea reactorului trebuie întreruptă pe durata schimbării elementelor combustibile, schimbarea continuă sau chiar parţial continuă este aproape imposibilă.

O altă dificultate ce apare pentru toate procesele de reproducere şi conversie este apariţia izotopilor grei ai materialelor fisionabile care afectează reacţia în lanţ parţial ca absorbanţi de neutroni, adică otrăvuri, şi parţial ca noi izotopi fisionabili.

4. Influenţa izotopilor cu număr de masă mare, produşi în timpul proceselor de reproducere şi conversie, asupra economiei de neutroni

În timpul proceselor de reproducere şi conversie se formează prin captura neutronilor, nuclee grele, care, chiar dacă nu sînt imediat fisionabile, pot deveni astfel, prin captura unui neutron suplimentar sau prin alte procese atomice ce duc la formarea de material fisionabil terţiar. Să considerăm pentru început schema generaţiei pentru ciclul de reproducere U^{233}—Th^{232} (fig. 9.8).

În această figură săgeţile îndreptate în jos reprezintă absorbţia unui neutron cu formarea unui nucleu al izotopului imediat superior. Numărul indică secţiunea de captură. Săgeţile orizontale către dreapta reprezintă tranziţia unui nucleu în altul cu un număr atomic mai mare. Numerele indică timpul mediu de dezintegrare (timpul de înjumătăţire). Săgeţile îndreptate în sus către dreapta reprezintă fisiunea. Numerele indică secţiunea de fisiune.

Din această schemă se poate vedea că nucleele Th^{233} şi Th^{234}, ca şi Pa^{233} şi Pa^{234}, pot trece pe calea unei dezintegrări beta în nuclee cu număr atomic imediat superior, iar prin captura unui neutron într-un izotop cu un număr de masă imediat superior.

Ca şi la deducerea ecuaţiei (9.1) luăm în consideraţie că viteza de transformare pentru dezintegrarea beta este egală cu λX, unde X este

Scanned with OKEN Scanner

concentrația tipului de nucleu respectiv, iar λ este contanta de dezintegrare corespunzătoare. Viteza de transformare prin captura de neutroni este $\sigma^a \Phi X$, dacă secțiunea de absorbție corespunzătoare este σ^a.

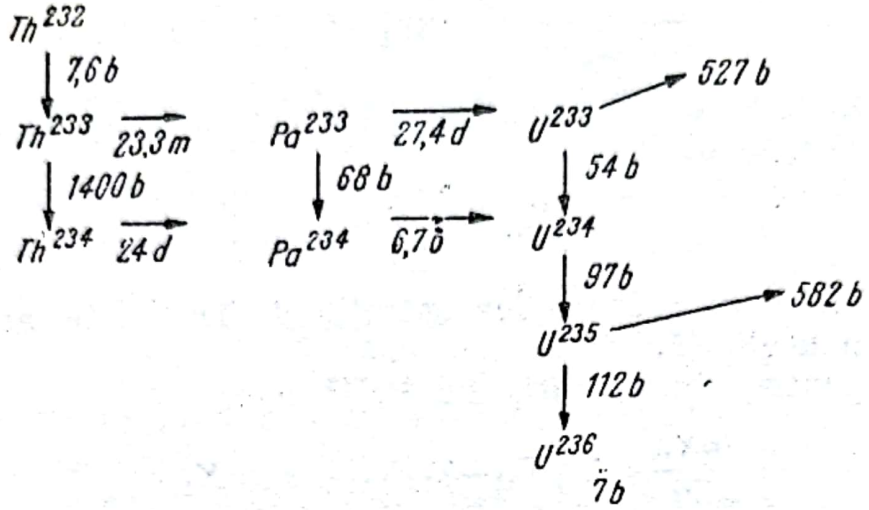


Fig. 9.8. Ciclul de reproducere $Th^{232} - U^{233}$.

Să vedem acum, cum diferite tipuri de nuclee care apar își modifică concentrația, considerînd înainte de toate raportul între cele două viteze de transformare (se consideră $\Phi = 10^{14}/cm^2 \cdot s$).

Tabelul următor arată că, separat de calea procesului normal de reproducere, numai calea Th^{233} la U^{234} via Pa^{233} și Pa^{234} reprezintă o variantă mai probabilă de evoluție a neutronilor.

	λ (s^{-1})	$\sigma^a\Phi$ (s^{-1})	$\frac{\sigma^a\Phi}{\lambda+\sigma^a\Phi}$
Th^{233}	$0{,}5\times10^{-2}$	$1{,}4\times10^{-7}$	~ 0
Th^{234}	$3{,}4\times10^{-7}$	$1{,}8\times10^{-10}$	$0{,}5\times10^{-3}$
Ph^{233}	$3{,}0\times10^{-7}$	$6{,}8\times10^{-9}$	$0{,}22\times10^{-1}$
Ph^{234}	$3{,}1\times10^{-5}$	$1{,}2\times10^{-8}$	$0{,}4\times10^{-3}$

Am considerat deja în ecuația (9.1) efectul factorului de conversie și reproducere. Să stabilim acum pierderea de neutroni produsă de nucleele Th^{233}, Th^{234}, Pa^{233} și Pa^{234}.

Toate concentrațiile sînt indicate mai jos prin X_{ik} (i — ultima cifră a numărului atomic; k — ultima cifră a numărului de masă). Concentrația Th^{233} este simbolizată, de exemplu, prin X_{02} și aceea a U^{233} prin X_{23}. Obținem pentru concentrațiile nucleelor atomice care ne interesează următoarele ecuații

$$\frac{dX_{03}}{dt} = \Sigma^*_{02}\Phi - \lambda_{03}X_{03} - \sigma_{03}\Phi X_{03}\,. \tag{9.67}$$

Conform considerațiilor care au condus la ecuația (9.6) găsim

$$\Sigma_{02}^{*} = \Sigma_{02}^{a} + \nu \Sigma_f \varepsilon P_f (1-p) \tag{9.68}$$

și

$$X_{03} = \frac{\Sigma_{02}^{*} \Phi}{\lambda_{03} + \sigma_{03}^{a} \Phi} \{1 - \exp[-(\lambda_{03} + \sigma_{03}^{a} \Phi) t]\}. \tag{9.69}$$

Efectul lui λ_{03} este că se atinge rapid o concentrație de echilibru și deoarece $\lambda_{03} \gg \sigma_{03} \Phi$ obținem

$$X_{03} = \frac{\Sigma_{02}^{*} \Phi}{\lambda_{03}}. \tag{9.70}$$

Conform tabelului precedent concentrația de Th^{234} este atît de mică încît poate fi neglijată.

Ecuația pentru concentrația de Pa^{233} este

$$\frac{dX_{13}}{dt} = \lambda_{03} X_{03} - \lambda_{13} X_{13} - \sigma_{13} \Phi X_{13} \tag{9.71}$$

unde λ_{13} corespunde unei vieți medii de 27,4 zile. Comparat cu perioada de funcționare a reactorului, acest timp este atît de mic încît putem presupune că X_{13} este la concentrația de echilibru. Astfel,

$$X_{13} = \frac{\lambda_{03} X_{03}}{\lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi} = \frac{\Sigma_{02}^{*} \Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi}. \tag{9.72}$$

Ultima ecuație rezultă din ecuația (9.70). Pentru concentrația de Pa^{234} avem

$$\frac{dX_{14}}{dt} = \sigma_{13} X_{13} \Phi - \lambda_{14} X_{14} - \sigma_{14} \Phi X_{14} \tag{9.73}$$

și se aplică considerații similare cu acelea făcute pentru Th^{233} deoarece $\lambda_{14} \gg \sigma_{14} \Phi$, iar starea de echilibru este rapid atinsă

$$X_{14} = \frac{\sigma_{13} X_{13} \Phi}{\lambda_{14}} = \frac{\sigma_{13} \Phi}{\lambda_{14}} \frac{\Sigma_{02}^{*} \Phi}{\lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi}. \tag{9.74}$$

Pentru a stabili concentrația de U^{234}, trebuie să se țină seama de faptul că U^{234} poate apare pe două căi; prima, via U^{233} și a doua, via Pa^{234}. Să stabilim pentru început concentrația de U^{233} care apare din Pa^{233}

$$\frac{dX_{23}}{dt} = \lambda_{13} X_{13} - \sigma_{23} \Phi X_{23}. \tag{9.75}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (9.72) și (9.68) obținem

$$\frac{dX_{23}}{dt} = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{13} + \sigma_{13} \Phi} \{\Sigma_{02}^{a} \Phi + \nu \sigma_{23}^{f} P_f \varepsilon (1-p) X_{23} \Phi\} - \sigma_{23} \Phi X_{23}. \tag{9.76}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această ecuație este identică cu ecuația (9.6) dacă introducem din nou coeficientul de pierdere ca și în ecuația (9.4).

În paragraful 2 s-a arătat că pentru un reactor condiția $dX_{23}/dt=0$ este foarte dificil să fie îndeplinită pentru procesele de reproducere. S-a văzut de asemenea că este necesar să se înlocuiască cantități mici de material fisionabil; în acest fel concentrația X_{23} crește încet. Este totuși potrivit pentru considerațiile calitative făcute să presupunem X_{23} ca fiind constant. Atunci obținem din ecuația (9.76)

$$X_{23}=\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}\cdot\frac{\Sigma_{02}^{*}}{\sigma_{23}}. \tag{9.77}$$

Să considerăm schimbarea de concentrație pentru U^{234} și să scriem

$$\frac{dX_{24}}{dt}=\alpha_{23}\sigma_{23}X_{23}\Phi+\lambda_{14}X_{14}-\sigma_{24}\Phi X_{24}. \tag{9.78}$$

Conform paragrafului 8 (c) din capitolul 2, α_{23} este acea fracțiune de U^{233} care este convertită prin captură de neutroni în nuclee de U^{234}. Înlocuim X_{23} și X_{14} din ecuațiile (9.77) și (9.74) și obținem

$$\frac{dX_{24}}{dt}=\alpha_{23}\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}\Sigma_{02}^{*}\Phi+\frac{\sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}\Sigma_{20}^{*}\Phi-\sigma_{23}\Phi X_{24}. \tag{9.79}$$

Soluția acestei ecuații este

$$X_{24}=\left[\frac{\alpha_{23}\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}\right]\frac{\Sigma_{02}^{*}}{\sigma_{24}}[1-\exp(-\sigma_{24}\Phi t)]. \tag{9.80}$$

În final, rămîne de stabilit concentrația de U^{235}. Pentru considerațiile noastre va fi avută exclusiv în vedere cantitatea de U^{235} care a fost format din U^{234} prin captură de neutroni. Putem neglija influența lui U^{236} asupra acestor procese deoarece acesta are o secțiune de absorbție foarte mică (7 barni).

Pentru U^{235} obținem următoarea ecuație a concentrației

$$\frac{dX_{25}}{dt}=\sigma_{24}X_{24}\Phi-\sigma_{25}\Phi X_{25}. \tag{9.81}$$

Înlocuind ecuația (9.80) în (9.81) se obține

$$\frac{dX_{25}}{dt}=\Sigma_{02}^{*}\Phi\left[\frac{\alpha_{23}\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}\right][1-\exp(-\sigma_{24}\Phi t)]-\sigma_{25}\Phi X_{25}. \tag{9.82}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția acestei ecuații diferențiale este

$$X_{25}=\frac{\Sigma_{02}^{*}}{\sigma_{24}}\left\{\frac{\alpha_{23}\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}\right\}\left\{\frac{\sigma_{24}}{\sigma_{25}}[1-\exp(-\sigma_{25}\Phi t)]-\frac{\sigma_{24}}{\sigma_{24}-\sigma_{25}}[\exp(-\sigma_{24}\Phi t)-\right.$$

$$\left.-\exp(-\sigma_{25}\Phi t)]\right\}. \tag{9.83}$$

Vom lega acum secțiunea de absorbție dăunătoare a tuturor izotopilor grei de material fisionabil și fertil care ne interesează, de cantitatea Σ_a, secțiunea macroscopică a materialului fisionabil (pentru $\Phi=10^{14}/\text{cm}^2\cdot\text{s}$)

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_{23}}=\frac{\Sigma_{03}+\Sigma_{13}+\Sigma_{14}+\Sigma_{24}+\Sigma_{25}}{\Sigma_{23}}. \tag{9.84}$$

Pentru diferite secțiuni de absorbție, conform ecuației (8.16), se aplică următoarele relații

$$\frac{\Sigma_{02}^{*}}{\Sigma_{23}}=C=\frac{\Sigma_{02}}{\Sigma_{23}}+\eta_{23}P_f\varepsilon(1-p)$$

$$\frac{\Sigma_{03}}{\Sigma_{23}}=C\frac{\sigma_{03}}{\lambda_{03}}\Phi=2{,}8\times10^{-5}C \quad \text{(neglijabil)}$$

$$\frac{\Sigma_{13}}{\Sigma_{23}}=C\frac{\sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}=2{,}22\times10^{-2}C$$

$$\frac{\Sigma_{14}}{\Sigma_{23}}=C\frac{\sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}\frac{\sigma_{14}\Phi}{\lambda_{14}}=0{,}8\times10^{-5}C \quad \text{(neglijabil)}$$

$$\frac{\Sigma_{24}}{\Sigma_{23}}=C\frac{\alpha_{23}\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}[1-\exp(-\sigma_{24}\Phi t)]=C\times0{,}12[1-\exp(-\sigma_{24}\Phi t)]-$$

$$-\frac{\Sigma_{25}}{\Sigma_{23}}(\eta_{25}P_f p\varepsilon-1)=-C(\eta_{25}pP_f\varepsilon-1)\left[\frac{\alpha_{23}\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}{\lambda_{13}+\sigma_{13}\Phi}\right]\times$$

$$\times\left\{[1-\exp(-\sigma_{25}\Phi t)]+\frac{\sigma_{25}}{\sigma_{24}-\sigma_{25}}\times[\exp(-\sigma_{24}\Phi t)-\exp(-\sigma_{25}\Phi t)]\right\}=$$

$$=-C\times0{,}09\times\{[1-\exp(-\sigma_{25}\Phi t)]+1{,}16[\exp(-\sigma_{25}\Phi t)-$$

$$-\exp(-\sigma_{24}\Phi t)]\} \tag{9.85}$$

În considerațiile privind secțiunea de absorbție a U^{235}, s-a ținut seama de faptul că U^{235} nu numai că absoarbe neutroni, dar poate, de asemenea, să fie fisionat și deci să producă noi neutroni; pentru aceasta a fost introdus termenul $\eta_{25}P_f p\varepsilon$.

Scanned with OKEN Scanner

Adăugînd ultimii doi termeni de absorbţie din ecuaţia (9.16) obţinem

$$\frac{\Sigma_{24}+\Sigma_{25}(1-\eta_{25}P_f p\varepsilon)}{\Sigma_{23}} = C[0{,}03-0{,}014\exp(-\sigma_{25}\Phi t)- \\ -0{,}017\exp(-\sigma_{24}\Phi t)]. \qquad (9.86)$$

Totalul tuturor termenilor de absorbţie este

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_{23}} = C[0{,}052-0{,}014\exp(-\sigma_{25}\Phi t)-0{,}017\exp(-\sigma_{24}\Phi t)]. \qquad (9.87)$$

Aici s-au luat pentru probabilitatea p de evitare a rezonanţei şi factorul de pierderi P_f pentru neutroni rapizi valorile: $p=0{,}9$ şi $P_f=0{,}93$. Izotopii grei de material fertil şi fisionabil produc o pierdere de neutroni între 2 şi 5 procente în funcţie de doza de radiaţie a materialului fisionabil.

Absorbţia neutronilor rapizi nu a fost luată în consideraţie deoarece probabilitatea sa este prea mică în comparaţie cu secţiunea termică de captură, pentru a schimba substanţial rezultatele. Secţiunea de captură pentru aceste reacţii nu a fost încă măsurată. În continuare, absorbţia izotopilor grei formaţi în procesul $U^{235}\to U^{238}\to Pu^{239}$ este considerată dăunătoare.

Cu aceleaşi notaţii ca în fig. 9.8, vom schiţa schema pentru transmutaţiile posibile ale U^{235}

$$U^{235} \xrightarrow{112\text{ barni}} U^{236} \xrightarrow{7\text{ barni}} U^{237}.$$

Nu este necesar să urmărim mai departe transmutaţia, deoarece viteza de formare a U^{237} este extrem de mică.

Concentraţia de U^{236} este

$$\frac{dX_{26}}{dt} = \alpha_{25}\sigma_{25}X_{25}\Phi-\sigma_{26}X_{26}\Phi. \qquad (9.88)$$

Soluţia este

$$\sigma_{26}X_{26} = \alpha_{25}\sigma_{25}X_{25}[1-\exp(-\sigma_{26}\Phi t)]. \qquad (9.89)$$

Termenul de absorbţie este

$$\frac{\Sigma_{26}}{\Sigma_{25}} = \alpha_{25}[1-\exp(-\sigma_{26}\Phi t)]. \qquad (9.90)$$

După o doză de $\Phi t=1/\sigma_{25}$, cînd proporţia de uraniu iniţial s-a micşorat la $1/e$, otrăvirea atinge mai puţin de 2 procente.

Analog schemei din fig. 9.8, pentru transmutaţia U^{238} în plutoniu a fost propusă următoarea schemă (fig. 9.9).

Din schemă se poate trage imediat concluzia că, practic, nu apar pierderi de neutroni în punctele de întîrziere U^{239} şi Np^{239}. Putem

Scanned with OKEN Scanner

deci presupune că pentru transformarea U^{238} în Pu^{239}, pe calea unui proces de reproducere sau conversie, se stabileşte imediat un echilibru între concentraţiile acestor substanţe. Rezultă că

$$\frac{dX_{49}}{dt} = \Sigma^*_{28}\Phi - \sigma_{49}\Phi X_{49}. \tag{9.91}$$

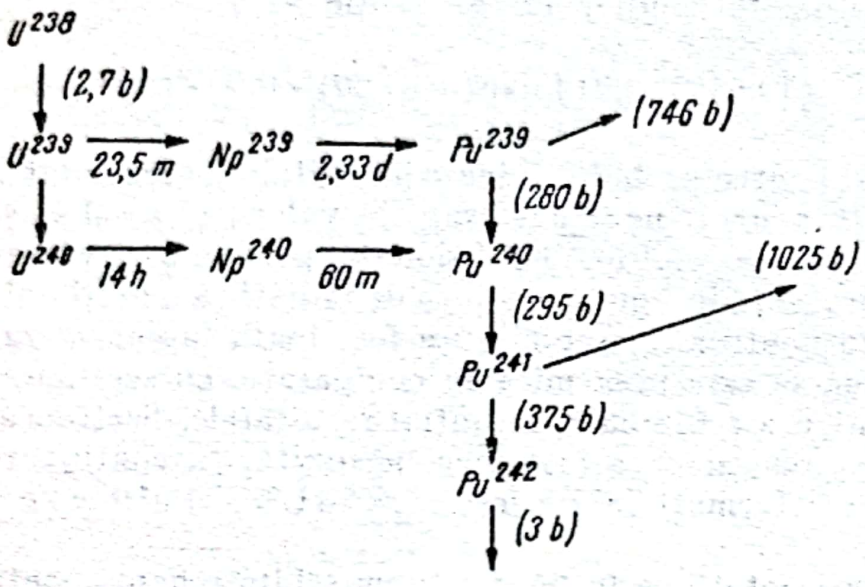


Fig. 9.9. Ciclul reproducător U^{238}-Pu^{239}.

Ca o soluţie a acestei ecuaţii diferenţiale obţinem aceeaşi expresie ca în ecuaţia (9.31).

Rezolvarea întregei probleme cere multe calcule, care, chiar dacă nu sînt dificile, sînt extrem de laborioase. Ne vom limita deci la studierea unui caz particular.

Presupunem că concentraţia de Pu^{239} este într-o stare de echilibru, în timp ce concentraţiile de Pu^{240} şi Pu^{243} nu au atins încă această stare. Pentru aceste două concentraţii, apare o primă stare de echilibru la momentul $t = 2/\sigma_{49}\Phi$, aproximativ 8 luni de la începutul funcţionării (se presupune $\Phi = 10^{14}/cm^2 \cdot s$).

Pentru otrăvirea totală datorită izotopilor grei de plutoniu considerăm cea mai defavorabilă situaţie. Concentraţia totală de Pu^{239} pentru $dX_{49}/dt = 0$ este

$$X_{49} = \frac{\Sigma^*_{28}}{\sigma_{49}}. \tag{9.92}$$

Schimbarea concentraţiei de Pu^{240} care rezultă este

$$\frac{dX_{40}}{dt} = \alpha_{49}\sigma_{49}\Phi X_{49} - \sigma_{40}X_{40}\Phi \tag{9.93}$$

Scanned with OKEN Scanner

(α_{49} reprezintă fracțiunea secțiunii totale de absorbție datorate procesului de transmutație $Pu^{239}+n \rightarrow Pu^{240}$).

Soluția ecuației (9.93) este

$$X_{40}=\frac{\alpha_{49}\sigma_{49}X_{49}}{\sigma_{40}}[1-\exp(-\sigma_{40}\Phi t)]=\alpha_{49}\frac{\Sigma_{28}^{*}}{\sigma_{40}}[1-\exp(-\sigma_{40}\Phi t)]. \quad (9.94)$$

Să considerăm acum concentrația de Pu^{241}

$$\frac{dX_{41}}{dt}=\sigma_{40}\Phi X_{40}-\sigma_{41}\Phi X_{41} \quad (9.95)$$

și

$$X_{41}=\alpha_{49}\frac{\Sigma_{28}^{*}}{\sigma_{41}}[1-\exp(-\sigma_{41}\Phi t)]+\alpha_{49}\frac{\Sigma_{28}^{*}}{\sigma_{41}-\sigma_{40}}\times \times[\exp(-\sigma_{41}\Phi t)-\exp(-\sigma_{40}\Phi t)]. \quad (9.96)$$

Următoarele ecuații se aplică pentru Pu^{242}

$$\frac{dX_{42}}{dt}=\alpha_{41}\Phi\sigma_{41}X_{41}-\sigma_{40}\Phi X_{42}$$

și

$$X_{42}=\alpha_{41}\alpha_{49}\Sigma_{28}^{*}\left\{\frac{1}{\sigma_{42}}[1-\exp(-\sigma_{42}\Phi t)]+\frac{\sigma_{40}}{(\sigma_{40}-\sigma_{41})(\sigma_{41}-\sigma_{42})}\times\right. \quad (9.97)$$

$$\times[\exp(-\sigma_{41}\Phi t)-\exp(-\sigma_{42}\Phi t)]+\frac{\sigma_{41}}{(\sigma_{40}-\sigma_{41})(\sigma_{41}-\sigma_{42})}\times$$

$$\left.\times[\exp(-\sigma_{42}\Phi t)-\exp(-\sigma_{40}\Phi t)]\right\}. \quad (9.98)$$

Cu concentrațiile obținute calculăm secțiunea totală de otrăvire cu izotopi grei de plutoniu. Procedînd asemănător, luăm în considerație că Pu^{241} nu numai absoarbe neutroni, dar poate fi, de asemenea, fisionat și poate produce neutroni noi. În consecință, înmulțim X_{41} cu factorul $(1-\eta_{41}P_f(1-p))$.

Secțiunea totală de otrăvire raportată la secțiunea macroscopică a materialului fisionabil pentru concentrația inițială este

$$\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{25}}=\frac{\Sigma_{40}+(1-\eta_{41}P_f\varepsilon p)\Sigma_{41}+\Sigma_{42}}{\Sigma_{25}^{*}}=$$

$$=C\alpha_{39}\Big[1-\exp(-\sigma_{40}\Phi t)]+[1-\eta_{41}P_f\varepsilon p]\{[1-\exp(-\sigma_{41}\Phi t)]+$$

$$+\frac{\sigma_{41}}{\sigma_{41}-\sigma_{40}}[\exp(-\sigma_{41}\Phi t)-\exp(-\sigma_{40}\Phi t)]\}+$$

$$+\alpha_{41}\{[1-\exp(-\sigma_{42}\Phi t)]+\frac{\sigma_{40}\sigma_{42}}{(\sigma_{40}-\sigma_{41})(\sigma_{41}-\sigma_{42})}\times$$

$$\times[\exp(-\sigma_{41}\Phi t)-\exp(-\sigma_{42}\Phi t)]+\frac{\sigma_{41}\sigma_{42}}{(\sigma_{40}-\sigma_{41})(\sigma_{40}-\sigma_{42})}\times$$

$$\times[\exp(-\sigma_{42}\Phi t)-\exp(-\sigma_{40}\Phi t)]\}\Big] \quad (9.99)$$

Scanned with OKEN Scanner

Să determinăm valoarea limită a otrăvirii totale pentru $\Phi t \to \infty$

$$\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{25}^*} = C\alpha_{49}[1+(1-\eta_{41}P_f\varepsilon p)+\alpha_{41}]. \qquad (9.100)$$

Valorile $\alpha_{41}=0{,}27$ și $\alpha_{49}=0{,}5$ sînt cunoscute. Pentru $\eta_{41}P_f p\varepsilon$ valoarea nu este suficient de certă; să o estimăm optimist la 2. Chiar cu această ipoteză există încă o pierdere datorită otrăvirii cu izotopi grei de plutoniu de aproximativ $0{,}135C$, adică 10—12 procente.

După o doză de iradiere $\Phi t = 1/\sigma_{41} \approx 10^{21}/\text{cm}^2$, otrăvirea conform ecuației (9.99) devine $\Sigma_s/\Sigma_{25} = 0{,}07C$, adică aproximativ 6 procente.

Vedem apoi că produsele derivate din Pu^{239} dau o otrăvire considerabil mai mare decît acelea ale U^{238}. Dacă valoarea lui η_{41} este mai mică decît cea presupusă mai sus, atunci nu se poate realiza principiul reciclării plutoniului. Plutoniul este mereu refolosit și, după cîteva schimbări ale elementelor combustibile, se vor acumula cantități așa de mari de izotopi mai grei decît Pu^{239} încît reactivitatea ar începe să scadă puternic — vezi ecuația (9.100).

S-ar putea reduce acest efect doar prin extragerea unei anumite fracțiuni a plutoniului și adăugarea de plutoniu nou, care nu conține izotopi grei. Această metodă ar permite folosirea principiului reciclării plutoniului în întregime.

Pentru reactorii cu uraniu îmbogățit, considerațiile de mai sus nu sînt importante, deoarece factorul inițial de conversie C este mai mic decît în cazul uraniului natural și timpii de utilizare sînt, de asemenea, mici în comparație cu timpii în care se formează izotopii grei ai plutoniului. Otrăvirea cu izotopi grei nu prezintă un rol important pînă cînd plutoniul care a fost generat în barele de combustibil folosite este utilizat mai departe.

Să discutăm o altă metodă de estimare a otrăvirii cu plutoniu care este, în particular, scurtă și relevantă. Considerăm starea în care Pu^{240} și Pu^{241} au atins concentrațiile lor de echilibru. Atunci, conform ecuațiilor (9.93) și (9.95) (cu concentrații constante de Pu^{239})

$$X_{40}\sigma_{40} = \alpha_{49}\sigma_{49}X_{49}; \quad X_{41}\sigma_{41} = \sigma_{40}X_{40} = \alpha_{49}\sigma_{49}X_{49}. \qquad (9.101)$$

Scriind valoarea privind cedarea de neutroni (Capitolul 2, paragraful 8 c) la această stare de echilibru

$$\eta = \frac{\nu_{49}\sigma_{49}^f X_{49} + \nu_{41}\sigma_{41}^f X_{41}}{\sigma_{49}X_{49} + \sigma_{40}X_{40} + \sigma_{41}X_{41}}. \qquad (9.102)$$

Cu valorile din ecuația (9.101) se obține

$$\eta = \frac{\eta_{49} + \alpha_{49}\eta_{41}}{1+2\alpha_{49}}. \qquad (9.103)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă estimăm optimist pe η_{41} la aproximativ 2, atunci $\eta=1{,}5$. Cedarea de neutroni a materialului fisionabil scade în comparaţie cu aceea a Pu^{239} pur, de 1,33 ori. Micşorarea în reactivitate care apare este deci considerabilă.

Să comparăm această scădere a randamentului de neutroni pentru Pu^{239} cu aceea corespunzătoare seriei U^{233}. Pentru seria U^{233} randamentul de neutroni este

$$\eta=\frac{\eta_{23}+\alpha_{23}\eta_{23}}{1+2\alpha_{23}}=2{,}11 \qquad (9.104)$$

considerabil mai mare decît în seria plutoniului.

Ca o concluzie a acestui capitol să comparăm relaţia constantelor de timp pentru cele 2 serii. Formarea de U^{234} comparată cu consumul de substanţă primară de fisiune, apare mult mai lentă decît formarea de Pu^{240}, comparată cu consumul de Pu^{239}.

În cazul Pu^{239} acest raport al constantelor de timp este $\sigma_{40}\Phi/\sigma_{49}\Phi=0{,}287$ iar în seria U^{233} este $\sigma_{24}\Phi/\sigma_{23}\Phi=0{,}167$.

Amestecul izotopilor de plutoniu afectează bilanţul de neutroni mai neplăcut decît amestecul izotopilor seriei U^{233}, nu numai ca mărime dar, de asemenea, datorită reducerii reactivităţii după un timp mai scurt decît în cazul amestecului de uraniu.

Discuţia noastră asupra efectului izotopilor grei arată că în evoluţia lor ca amestecuri cu materialele fisionabile apare fenomenul de otrăvire din ce în ce mai puternic. În timp ce otrăvirea cu produse de fisiune poate fi eliminată din elementele combustibile consumate, pe cale chimică, aceasta nu este posibil în cazul elementelor fisionabile grele; pentru eliminarealor trebuie să fie folosite procese fizice de separare a izotopilor.

Aceste proprietăţi ale izotopilor grei trebuie urmărite, în particular, în calculele ciclurilor de material fisionabil—material fertil.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul X

DEPENDENȚA PROPRIETĂȚILOR TERMICE ALE UNUI REACTOR DE FLUXUL DE NEUTRONI

Una dintre cele mai importante cerințe pentru construcția unui reactor este cunoașterea dependenței proceselor nucleare de distribuția de temperatură în elementele combustibile și în gazele sau lichidele de răcire. În cap. VI am vorbit despre o temperatură medie a reactorului, la a cărei creștere reactivitatea scade. Această descriere va fi acum detaliată considerînd influența locală a temperaturii asupra reacției în lanț.

Căldura generată în reactor este preluată de agentul de răcire, care intră în reactor la o anumită temperatură θ_0 și îl părăsește cu temperatura de ieșire θ_e. Fie l lungimea reactorului în direcția canalului de ieșire. Temperatura de ieșire θ_e este puternic dependentă de distribuția de putere din interiorul reactorului: în regiunea de flux mic de neutroni (de exemplu, la marginea reactorului), cantitatea de căldură produsă este mai mică, astfel că agentul de răcire care trece prin această regiune este mai puțin încălzit. Din motive constructive este necesar ca agentul de răcire să părăsească toate părțile reactorului cu aceeași temperatură de ieșire, deoarece este foarte dificil de realizat un amestec al gazelor de răcire după aceea. Diferențele de temperatură ar avea ca rezultat o utilizare necorespunzătoare a căldurii generate de reactor. Din considerații termodinamice este necesară o temperatură medie cît mai mare posibil, pentru a obține o conversie eficientă a căldurii în lucru mecanic în turbină. Totuși, temperatura curentului agentului de răcire amestecat este mai mică decît temperatura cea mai ridicată ce poate fi atinsă în reactor, temperatură care este determinată de proprietățile de material ale elementelor combustibile (punct de topire etc.). Această cerință de a se obține o temperatură de ieșire cu o distribuție cît mai uniform posibilă, poate fi realizată pe două căi: fie printr-o distribuție corespunzătoare a fluxului agentului de răcire în canalele din reactor, fie pe calea realizării unei densități de putere cît mai uniforme în reactor.

În cazul reactorilor de dimensiuni mici, cu reflector, forma fluxului de neutroni în interiorul lor este considerabil aplatizată (vezi figura 10.1)

Scanned with OKEN Scanner

datorită acțiunii reflectorului. Aceasta presupune că reflectorul are aproximativ aceeași dimensiune ca și diametrul reactorului (vezi cap. V).

De asemenea, distribuția fluxului de neutroni în diferite zone ale reactorului poate fi uniformizată mai mult prin introducerea barelor

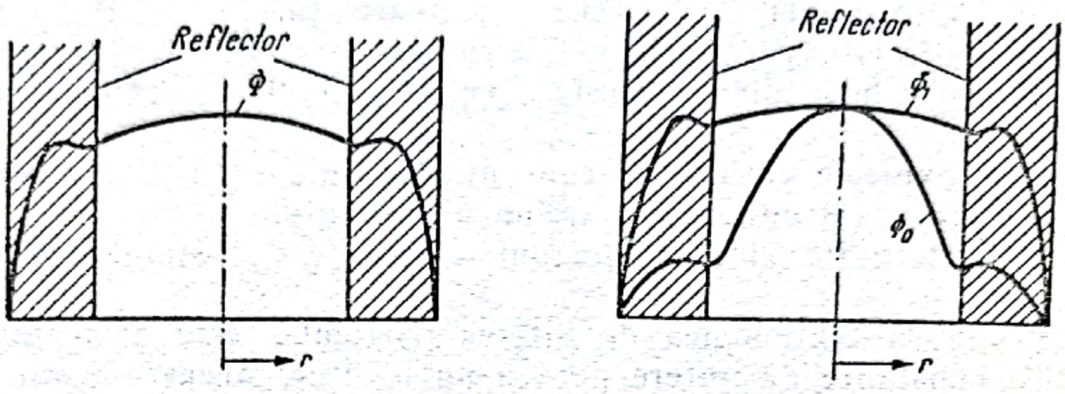


Fig. 10.1. și 10.2. Aplatizarea fluxului.

de control (absorbante) sau prin aranjarea convenabilă a elementelor combustibile care au fost consumate în diferite stadii de funcționare. Astfel de operații pot crește fluxul de neutroni de la valoarea Φ_0 (dinaintea unor intervenții de acest fel) la valoarea Φ_1 (vezi fig. 10.2).

Efectul modificărilor este arătat în figurile 10.1 și 10.2 și va fi prezentat în continuare într-o formă matematică adecvată.

Am văzut în cap. II vezi (2.115) că distribuția spațială a fluxului de neutroni este dată de

$$\nabla^2\Phi+\frac{\Sigma_a+\Sigma_m+\Sigma_v}{D}(k_\infty P_f-1)\Phi=0. \tag{10.1}$$

În ecuația (10.1) am separat secțiunile macroscopice de absorbție pentru combustibil, Σ_a, moderator Σ_m și otrăvuri Σ_v în loc de a le considera global ca în ecuația (2.115).

Pentru a explica relațiile mai clar, mai transformăm ecuația cu ajutorul formulei celor patru factori $k_\infty=\eta\varepsilon pP_f$ și $f=\Sigma_a/(\Sigma_a+\Sigma_m+\Sigma_v)$ în următoarea formă

$$\nabla^2\Phi+\frac{1}{D}[\eta\varepsilon pP_f\Sigma_a-(\Sigma_a+\Sigma_m+\Sigma_v)]\Phi=0 \tag{10.2}$$

și încă

$$\nabla^2\Phi+\frac{\Sigma_a}{D}(\eta\varepsilon pP_f-1)\Phi-\frac{\Sigma_m+\Sigma_v}{D}\Phi=0; \tag{10.3}$$

atunci

$$\nabla^2\Phi+\varkappa^2\Phi=0 \tag{10.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\varkappa^2 = \frac{\Sigma_a}{D}(\eta\varepsilon p P_f - 1) - \frac{\Sigma_m + \Sigma_v}{D}; \qquad (10.5)$$

$\varkappa^2$ este o măsură a curburii distribuției de flux într-un reactor. Cu cît este mai mic $\varkappa^2$ cu atît curba este mai aplatizată.

Din ecuația (10.4) se poate vedea că, cu cît este mai mare termenul $(\Sigma_m + \Sigma_v)/D$ și mai mică expresia $\Sigma_a(\eta\varepsilon p P_f - 1)/D$ cu atît $\varkappa^2$ devine mai mic.

A doua expresie variază cu concentrația de combustibil și ea poate fi variată prin introducerea barelor absorbante.

$\varkappa^2$ — curbura fluxului de neutroni — este deci ajustabilă într-un domeniu larg.

O problemă tehnologică de interes particular este atingerea unei densități constante de putere pentru un reactor. Aceasta înseamnă că

$$Q = \Sigma_f \Phi E_f = \text{constant} \quad (E_f \text{ — energia pe fisiune}); \qquad (10.6)$$

din aceasta rezultă, de asemenea, că

$$\Sigma_a \Phi = \text{constant, deoarece } \Sigma_f = \frac{\Sigma_a}{1+\alpha}.$$

Ecuația (10.4) este atunci

$$\nabla^2\Phi - \rho^2\Phi = -c \qquad (10.7)$$

în care

$$\rho^2 = \frac{\Sigma_m + \Sigma_v}{D} \qquad (10.8)$$

și

$$c = \frac{\Sigma_a}{D}(\eta p P_f \varepsilon - 1)\Phi. \qquad (10.9)$$

La marginea unui reactor $\Phi \to 0$; atunci concentrația de combustibil ar trebui să fie acolo făcută mai mare decît este tehnic posibil; în practică, însă, reflectorul asigură ca fluxul de neutroni să nu tindă la zero la marginea reactorului. Cu o distribuție potrivită a materialului fisionabil este deci tehnic posibil să se obțină o densitate de putere constantă.

Desigur, trebuie să ne reamintim aici că într-un reactor, nici prima și nici a doua componentă a ecuației (10.5) nu poate fi ținută constantă, ambele cantități modificîndu-se datorită efectelor de reproducere și conversie prin fenomenul de otrăvire și prin efecte de temperatură.

$\varkappa^2$ este atunci un parametru variabil, nu numai spațial ci și temporal. Controlul lui $\varkappa^2$, pe calea schimbării continue a elementelor combustibile cu diferite grade de ardere, este tehnic posibil numai într-o măsură limitată.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de criticitate pentru reactorul în stare de funcțiune se obține dacă se ia în considerație dependența de temperatură a lui $\varkappa^2$, conform ecuației (3.7),

$$\varkappa^2 = \frac{\Sigma_a+\Sigma_m+\Sigma_v}{D}(k_\infty P_f - 1) = \frac{\Sigma_a+\Sigma_m+\Sigma_v}{D}(k_{\infty 0} P_f - 1 - \Gamma T).$$

Indicele zero arată că respectiva cantitate este legată de temperatura θ_0 a gazului de răcire. T este diferența de temperatură față de θ_0, măsurată în grade Celsius. Obținem pentru condiția de criticitate a reactorului, conform ecuației (3.7), expresia

$$B^2 = \frac{\int_{V_R} dV \left\{\frac{(\Sigma_a+\Sigma_m+\Sigma_v)_0}{D}(k_{\infty 0} P_f - 1 - \Gamma T)\right\}\Phi_0^2}{\int_{V_R} \Phi_0^2\, dV}; \qquad (10.10)$$

Integrarea trebuie să se facă peste întregul volum V_R al reactorului. Conform ecuației (2.138), B^2 este factorul geometric („buckling") al reactorului cilindric neperturbat. Φ_0 este funcția neperturbată a fluxului de neutroni avînd o curbură B^2. Așa cum vom arăta în continuare T este o funcție de Φ_0.

Funcția neperturbată pentru Φ_0 este dată de

$$\nabla^2\Phi_0 + B^2\Phi_0 = 0. \qquad (10.11)$$

Conform ecuației (2.132) avem

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} = -B^2\Phi_0 \qquad (10.12)$$

a cărei soluție este

$$\Phi_0 = A J_0(\alpha r)\cos(\beta z) \quad \text{cu} \quad \alpha^2+\beta^2 = B^2 \qquad (10.13)$$

în care J_0 este funcția Bessel de ordinul zero, iar

$\alpha = \frac{2{,}405}{R^*}$ (R^* — raza efectivă a reactorului, inclusiv reflectorul)

$\beta = \frac{\pi}{l^*}$ (l^* — înălțimea efectivă a reactorului, inclusiv reflectorul).

Să împărțim acum reactorul pe direcția canalelor de răcire în regiuni circulare astfel încît fiecare celulă să conțină un canal de răcire. Considerăm că celula are lungimea l (lungimea reactorului), secțiunea transversală F și volumul Fl. Dacă în interiorul acestei celule, suprafața de transfer a căldurii este f, atunci f/l este suprafața de transfer a căldurii pe cm. Printr-o astfel de celulă curge curentul j de agent de răcire cu

Scanned with OKEN Scanner

capacitatea calorică c_p. Energia transmisă pe cm și secundă de la elementul combustibil al unei celule este

$$q = jc_p \frac{d\theta}{dz} \tag{10.14}$$

în care θ este temperatura agentului de răcire măsurată față de θ_e, temperatura de intrare.

Pe de altă parte, energia transmisă pe cm și secundă de un element combustibil cu temperatura T și coeficientul de transfer al căldurii α este

$$q = \frac{f\alpha}{l}(T - \theta). \tag{10.15}$$

Deoarece fluxul de neutroni este dependent de energia calorică dată mai sus, formulăm pentru această celulă relația între aceste două cantități. Dacă energia medie produsă pe cm^3 și secundă în orice punct al celulei este $\Sigma_f \Phi E_f$, atunci energia produsă pe cm și secundă este

$$q = F\Sigma_f \Phi E_f = S\Phi \quad \text{cu} \quad S = F\Sigma_f E_f. \tag{10.16}$$

Puterea întregii celule este

$$Q_z = \int_{-l/2}^{+l/2} q\,dz = E_f F \int_{-l/2}^{+l/2} \Sigma_f \Phi\,dz \tag{10.17 a}$$

și puterea totală a reactorului rezultă

$$Q = E_f \int_0^R r\,dr \int_{-l/2}^{+l/2} \Sigma_f \Phi\,dz. \tag{10.17 b}$$

Conform relațiilor (10.13) și (10.16) avem

$$q = S \cdot A \cos(\beta z) J_0(\alpha r). \tag{10.18}$$

Conform acestei descrieri, S poate depinde atît de r cît și de z. În baza ecuației (10.14) distribuția de temperatură a agentului de răcire este

$$\theta(z) = A \int_{-l/2}^{+z} dz \cos(\beta z) \frac{SJ_0(\alpha r)}{jc_p}. \tag{10.19}$$

Din ecuația (10.15) distribuția de temperatură la suprafața elementelor combustibile este

$$T = A \cos(\beta z) \frac{SJ_0(\alpha r)}{(f\alpha/l)} + A \int_{-l/2}^{+z} \cos(\beta z)\,dz \frac{SJ_0(\alpha r)}{jc_p}. \tag{10.20}$$

Ecuația (10.19) arată că independența dorită a temperaturii de ieșire, de coordonata de poziție r, poate fi realizată cu condiția ca

Scanned with OKEN Scanner

$SJ_0(\alpha r)/jc_p$ să fie constant. Dacă jc_p este constant, atunci $SJ_0(\alpha r)$ trebuie, de asemenea, să fie constant. Dacă S este constantă, atunci printr-o micşorare a curentului de răcire j, în majoritatea construcţiilor se poate obţine ca

$$\frac{J_0(\alpha r)}{jc_p} = \text{const.} \tag{10.21}$$

Curentul de răcire j trebuie să fie de asemenea micşorat şi, dacă distribuţia radială a puterii are altă formă decît funcţia $J_0(\alpha r)$ pe baza măsurilor luate pentru a aplatiza distribuţia fluxului de neutroni. Dacă nu putem realiza aceasta, atunci distribuţia de combustibil, şi odată cu ea cantitatea $S = F\Sigma_f E_f$, trebuie ajustată corespunzător.

Cantitatea necunoscută din sistemul nostru de ecuaţii este A, funcţia pentru fluxul neperturbat de neutroni. Ea se obţine formal prin înlocuirea valorii lui T din ecuaţia (10.20) în ecuaţia (10.10). Ecuaţia (10.10) reprezintă atunci relaţia între lungimea l a reactorului, diametrul R al reactorului şi maximul fluxului de neutroni A.

În practică se fixează cea mai ridicată temperatură T posibilă şi atunci se obţine maximul fluxului de neutroni neperturbat, A, din ecuaţia (10.20).

Cu ajutorul ecuaţiei (10.20) determinăm pentru o celulă, la o distanţă l de axa reactorului, înălţimea z_{max} pentru temperatura T_{max} a elementului combustibil.

Pentru acest scop prima derivată o egalăm cu zero, adică

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 = -\beta A \sin(\beta z)\frac{SJ_0(\alpha r)}{(f\alpha/l)} + A\cos(\beta z)\frac{SJ_0(\alpha r)}{jc_p}. \tag{10.22 a}$$

Din aceasta obţinem

$$\operatorname{tg}(\beta z_{max}) = \frac{(f\alpha/l)}{\beta jc_p} = \frac{f\alpha}{\beta jc_p l} = s \tag{10.22 b}$$

iar

$$\sin(\beta z_{max}) = \frac{s}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{şi} \quad \cos(\beta z_{max}) = \frac{1}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{10.22 c}$$

Conform ecuaţiei (10.20)

$$T_{max} = \Phi_0\left\{l_2\cos(\beta z_m) + \frac{l_1}{\beta}\sin(\beta z_m) + \frac{l_1}{\beta}\sin\frac{\beta l}{2}\right\} =$$

$$= \Phi_0 l_2\left\{\frac{1}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{s^2}{(1+s^2)^{\frac{1}{2}}} + s\sin\frac{\beta l}{2}\right\} =$$

$$= \Phi_0 l_2\left\{(1+s^2)^{\frac{1}{2}} + s\sin\frac{\beta l}{2}\right\} \tag{10.23}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $\Phi_0 = A\,SJ_0(\alpha r)$; $l_1 = 1/jc_p$; $l_2 = l/f\alpha$.
Φ_0 este dat de

$$\Phi_0 = \frac{T_{max}}{l_2\left((1+s^2)^{\frac{1}{2}} + s\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right)}. \tag{10.24}$$

Din ecuaţiile (10.19) şi (10.20) obţinem pentru θ şi T valorile

$$\theta = \frac{sT_{max}}{\left((s^2+1)^{\frac{1}{2}} + s\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right)}\left\{\sin(\beta z) + \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right\} \tag{10.25}$$

şi

$$T = \frac{T_{max}}{\left((1+s^2)^{\frac{1}{2}} + s\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right)}\left\{\cos(\beta z) + s\sin(\beta z) + \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right\}. \tag{10.26}$$

Aici $s = l_1/\beta l_2 = f\alpha/\beta jc_p l$ este o funcţie încă uşor dependentă de j deoarece $j^{0,8} \sim \alpha$. Puterea totală a reactorului este dată de

$$Q = \int jc_p\theta(l) r\,dr = \frac{F_R}{F} jc_p\theta(l). \tag{10.27}$$

Aici F_R este suprafaţa totală de transfer a căldurii reactorului. Din ecuaţiile (10.25) şi (10.26) rezultă

$$T - \theta = \frac{T_{max}\cos(\beta z)}{\left((1+s^2)^{\frac{1}{2}} + s\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right)}. \tag{10.28}$$

Atunci, în această aproximaţie, cea mai mare diferenţă de temperatură între agentul de răcire şi suprafaţa elementului combustibil este de aşteptat să se obţină în mijlocul reactorului ($z=0$).

În acest punct formăm expresia

$$\frac{T(0)-\theta(0)}{\theta(0)} = \frac{1}{s\sin(\beta l/2)}. \tag{10.29}$$

Deoarece conform ecuaţiei (10.13) cantitatea $\sin(\beta l/2)$ trebuie să fie aproximativ egală cu 1, găsim că s este cuprins între valorile 2 şi 6 pentru reactorii obişnuiţi.

Cu ajutorul ecuaţiei (10.27) se poate stabili că

$$2\theta(0) = \theta(l/2). \tag{10.30}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta înseamnă că temperatura medie a agentului de răcire este atinsă în mijlocul reactorului. Aceeaşi concluzie este valabilă şi pentru temperatura la suprafaţa elementelor combustibile.

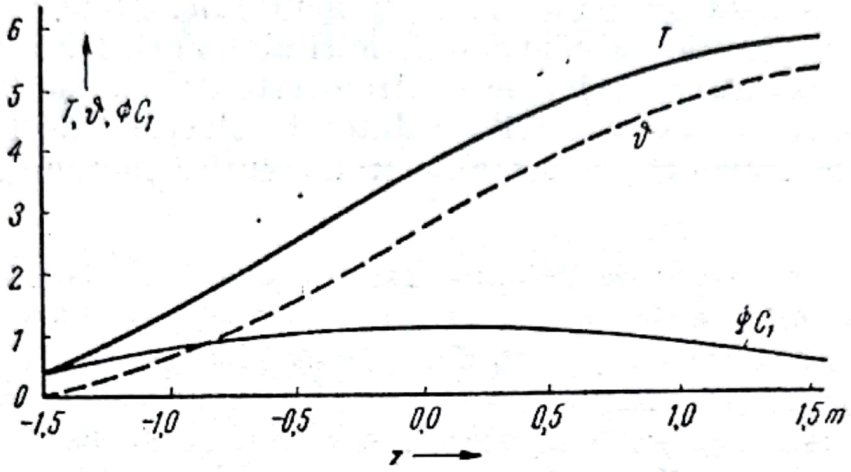


Fig. 10.3. Variaţia fluxului Φ, a temperaturii fluidului de răcire θ şi temperaturii la suprafaţa elementului combustibil T, pe axul central al unui reactor.

Forma curbelor pentru Φ, T şi θ în lungul axului central al reactorului ($r=0$) este reprezentată în figura 10.3. T şi θ sînt date în unităţi

$$\frac{\left((1+s^2)^{\frac{1}{2}}+s\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right)}{T_{max}}$$

iar Φ în unităţi

$$\frac{l_2\left((1+s^2)^{\frac{1}{2}}+s\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\right)}{T_{max}}.$$

Valorile exacte obţinute prin calcul diferă puţin de cele deduse aici. În calculele efectuate nu au fost luate în consideraţie efectele temperaturii elementului combustibil asupra reactivităţii. Ele produc o distorsiune a distribuţiei fluxului de neutroni. Incluzînd acest efect în calculele aproximative efectuate pînă acum vom scrie ecuaţia (10.1) în următoarea formă

$$\frac{\nabla^2\Phi}{\Phi}+\frac{(\Sigma_a+\Sigma_m+\Sigma_v)_0}{D}(k_\infty P_f-1-\Gamma T)=0. \qquad (10.31)$$

Scanned with OKEN Scanner

Primul termen în această ecuație este curbura fluxului de neutroni. Acest termen este și o măsură a scăpărilor de neutroni termici din reactor. Dacă acest termen este mare, atunci scăderea reactivității datorită creșterii de temperatură a elementului combustibil nu are o contribuție substanțială asupra curbura de flux neutronic. Numai în reactorii mari la care scurgerile de neutroni termici sînt mici, iar schimbarea în reactivitate datorată fluxului de neutroni este de același ordin de mărime ca și pierderea de reactivitate datorată efectului de temperatură, poate să apară o distorsiune semnificativă a curbei fluxului de neutroni.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA A TREIA

Fundamente matematice ale fizicii reactorului

În ultimele capitole se vor prezenta instrumentele matematice pentru tratarea problemelor reactorului. Este normal ca datorită complexității materialului să nu fie posibil să se dea o prezentare care să fie și cuprinzătoare și matematic riguroasă. Această secțiune matematică este mai mult o colecție de formule sau o trecere în revistă a metodelor, decît un manual. În plus, aici, spre deosebire de capitolele precedente, nu se va da atenție proceselor fizice din reactori ci, aproape în exclusivitate, se va face prezentarea lor matematică. Cunoștințele matematice prezentate în continuare sînt cele care se predau la cursurile politehnice. Acestea includ, de exemplu, calculul diferențial și integral, analiza vectorială, ecuații diferențial ordinare, determinanți, numere complexe etc. Bazate pe aceste fundamente, capitolele următoare conțin un sumar al capitolelor din matematică care joacă un rol aparte în fizica și tehnologia reactorului.

Rolul acestei părți este să dea inginerului reactorist cunoștințele de matematică necesare pentru citirea literaturii de specialitate. Din experiența noastră este sigur că pentru inginerul care nu este familiarizat cu aceste noțiuni, studiul cărților de specialitate și periodicelor este foarte dificil.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XI
ANALIZA VECTORIALĂ

1. Vectori şi matrice

Un vector este o mărime care diferă de mărimile scalare prin aceea că este precis definit: pentru definirea lui univocă mai trebuie indicată o direcţie şi un sens. Notăm vectorii cu săgeţi, şi scriem, de exemplu,

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0 = a \cdot \vec{a}_0 \tag{11.1}$$

unde $|\vec{a}|$ sau a este mărimea vectorului şi $\vec{a}_0$ vectorul unitate pentru $\vec{a}$. $\vec{a}_0$ are mărimea 1 şi aceeaşi direcţie ca şi vectorul $\vec{a}$. Vectorii se pot aduna şi scădea conform unor reguli obişnuite, a căror semnificaţie geometrică rezultă din figura 11.1. Vectorii sînt comutativi, distributivi etc.

Există două tipuri de înmulţiri ale vectorilor:

Produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este definit ca produsul mărimilor lui $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, înmulţit cu cosinusul unghiului dintre $\vec{a}$ şi $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}). \tag{11.2}$$

Produsul scalar a doi vectori care fac un unghi drept este egal cu zero, iar acela a doi vectori paraleli este egal cu produsul mărimilor lor.

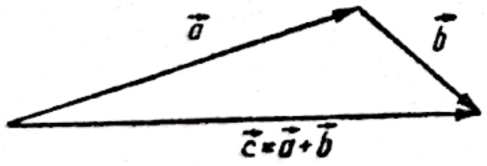


Fig. 11.1. Adunarea vectorilor.

În timp ce produsul scalar este o cantitate scalară, produsul vectorial este un vector definit de

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{c}_0. \tag{11.3}$$

$\vec{c}$ este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ şi succesiunea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează un sistem drept. Mărimea sa este egală cu produsul mărimilor lui $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ înmulţit cu sinusul unghiului dintre ei. Mărimea lui $\vec{a} \times \vec{b}$ este deci

Scanned with OKEN Scanner

egală cu aria paralelogramului definit de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$. $\vec{c}_0$ este vectorul unitar pe direcția lui $\vec{c}$.

În timp ce produsul scalar nu se modifică dacă factorii sînt interschimbați, produsul vectorial își schimbă semnul în urma acestei schimbări. Astfel

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \tag{11.4}$$

Legea de distributivitate, în general, nu se aplică la înmulțirea vectorilor. Astfel, de exemplu $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ este un vector a cărui mărime este $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) |\vec{c}|$ și a cărui direcție este aceea a lui $\vec{c}$, în timp ce $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ are mărimea $|\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos(\vec{a}, \vec{c}) |\vec{b}|$ și direcția lui $\vec{b}$. Împărțirea vectorilor este, în general, imposibilă deoarece procesul invers înmulțirii nu este univoc (numai în analiza vectorială și tensorială se practică uneori o definiție formală a împărțirii).

În general, vectorii sînt reprezentați într-un sistem cartesian de coordonate. Fie direcțiile axelor de coordonate date prin vectorii unitari $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n$. Coordonatele $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ ale unui vector $\vec{a}$ sînt atunci proiecțiile lui $\vec{a}$ pe direcțiile de coordonate în fiecare caz. În consecință, putem scrie datorită regulilor de adunare a vectorilor

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n \tag{11.5}$$

în care

$$a_1 = |\vec{a}| \cos(\vec{a}_1, \vec{e}_1); \quad a_2 = |\vec{a}| \cos(\vec{a}_1, \vec{e}_2); \ldots; \quad a_n = |\vec{a}| \cos(\vec{a}_1, \vec{e}_n). \tag{11.6}$$

Deoarece $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ sînt vectori unitari, atunci, conform relației (11.2), avem

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1; \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2; \ldots; \quad a_n = \vec{a} \cdot \vec{e}_n. \tag{11.7}$$

Din relațiile (11.5) și (11.7) se obține pentru vectorul $\vec{a}$

$$\vec{a} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \vec{e}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (\vec{a} \cdot \vec{e}_\nu)\vec{e}_\nu \quad \text{cu} \quad a_\nu = (\vec{a} \cdot \vec{e}_\nu). \tag{11.8}$$

Doi vectori sînt egali unul cu altul dacă au componentele egale, adică dacă toate produsele $(\vec{a} \cdot \vec{e}_n)$ sînt egale.

Produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ poate fi reprezentat în funcție de coordonatele vectorilor sub forma

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + a_1 b_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + \ldots + a_2 b_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + a_2 b_2 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + \ldots \tag{11.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde, deoarece vectorii unitari $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots$ sînt perpendiculari unul pe altul,

$$\vec{e}_\nu \cdot \vec{e}_\mu = \begin{cases} =1 & \text{pentru } \nu = \mu \\ =0 & \text{„ } \nu \neq \mu \end{cases} \tag{11.10}$$

astfel că

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu. \tag{11.11}$$

Dacă, în particular, $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt vectori unitari perpendiculari unul pe celălalt, atunci

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 = 1; \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2 = 1 \text{ și } \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu = 0 \tag{11.12}$$

și dacă nu avem numai doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$, ci n vectori $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$, care sînt tot vectori unitari reciproc perpendiculari unul pe altul, atunci relația (11.12) se aplică și acestora

$$\vec{s}_\nu \cdot \vec{s}_\mu = \begin{cases} =1 & \text{pentru } \nu = \mu \\ =0 & \text{„ } \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{11.13}$$

Între vectorii $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$ există aceleași relații ca în (11.10) și sînt la fel de potriviți pentru a servi ca sistem de coordonate ca și vectorii $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Astfel de sisteme sînt numite sisteme ortogonale.

Două sisteme de coordonate $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ și $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$ sînt, în general, rotite unul față de altul și adesea apare problema reprezentării unui vector $\vec{a}$ care în sistemul $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ are coordonatele $a_1, a_2, \ldots, a_n$, prin coordonatele $b_1, b_2, \ldots, b_n$ în sistemul rotit $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$. Între aceste două sisteme de coordonate există o relație liniară

$$\begin{aligned} d_{11}a_1 + d_{12}a_2 \ldots + d_{1n}a_n &= b_1 \\ d_{21}a_1 + d_{22}a_2 \ldots + d_{2n}a_n &= b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ d_{n1}a_1 + d_{n2}a_2 \ldots + d_{nn}a_n &= b_n. \end{aligned} \tag{11.14}$$

Transformarea (11.14) poate fi interpretată ca transpunerea vectorului $\vec{a}$ cu ajutorul unei rotații într-un vector $\vec{b}$, în același sistem de coordonate.

Scanned with OKEN Scanner

Transformarea (11.14) poate fi scrisă sub formă matriceală

$$Da = b. \tag{11.15}$$

Aici componentele vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt scrise ca matrice coloană

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

iar matricea de transformare

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \ldots d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} \ldots d_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ d_{n1} \ldots & d_{n2} \ldots d_{nn} \end{pmatrix} \tag{11.17}$$

ca o matrice pătratică. Regula de înmulţire a matricelor D şi a rezultă din ecuaţiile (11.14)

$$b_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\mu\nu} a_\nu. \tag{11.18}$$

De fiecare parte a semnului egal, ecuaţia (11.15) conţine o matrice coloană. Adesea se combină cîteva ecuaţii de acest tip, scriind diferitele matrice coloană una lîngă cealaltă

$$DA = B. \tag{11.19}$$

Aici matricea D are forma dată în ecuaţia (11.17). Matricele A şi B apar în fiecare caz prin alăturarea unor coloane de tipul (11.16) care se numerotează apoi de la stînga la dreapta

$$A = (a_1 a_2 \ldots a_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix}.$$

$$B = (b_1 b_2 \ldots b_m) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nm} \end{pmatrix} \tag{11.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Regula de înmulțire a matricelor D și A din ecuația (11.19) este

$$b_{\mu\rho} = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\mu\nu} a_{\nu\rho} \tag{11.21}$$

în care $b_{\mu\rho}$ este elementul din linia μ și coloana ρ a matricei B. Atunci regula de înmulțire este aceeași cu cea folosită pentru determinanți.

Se poate vedea din aceste reguli operaționale că, în general, nu se poate aplica legea de comutativitate la înmulțirea matricelor.

Spre deosebire de împărțirea vectorilor, împărțirea matricelor este posibilă numai dacă matricea reciprocă este o matrice pătratică și are deci același număr de linii și coloane, iar determinantul său nu este nul. În consecință, așa cum deja am stabilit, nu se poate forma reciprocul unui vector care, conform ecuației (11.16) poate fi scris ca o matrice.

Reciproca D^{-1} a unei matrice pătratice D este definită de relația

$$D^{-1}D = E \tag{11.22}$$

în care E este matricea unitate

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}; \tag{11.23}$$

Ea conține tot atîtea linii cîte coloane are D și numai termenii diagonali sînt elemente nenule, egale toate cu unitatea.

Matricea D^{-1} are forma

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} \begin{pmatrix} |D_{11}| & |D_{21}| & \dots & |D_{n1}| \\ \vdots & & & \\ |D_{1n}| & \dots & \dots & |D_{nn}| \end{pmatrix}. \tag{11.24}$$

Determinanții sînt notați prin linii verticale. Astfel, $|D|$ este determinantul matricei D și $|D_{\mu\nu}|$ minorul corespunzător lui $d_{\mu\nu}$ din $|D|$. (De notat că în ecuația (11.24) elementul $|D_{\nu\mu}|$ nu este în același loc ca și elementul $d_{\nu\mu}$ în ecuația (11.17), ci într-o poziție care corespunde unei reflexii față de diagonala principală, adică poziției lui $d_{\mu\nu}$). Matricea D^{-1} este numită matrice inversă sau reciprocă a matricei D. Ca un exemplu, să alegem o matrice ortogonală bidimensională. Aceasta este o matrice care transformă un sistem ortognal într-un alt sistem ortogonal pe calea unei transformări de tipul reprezentat de ecuația (11.15), adică, în acest caz, printr-o rotație. Fie α unghiul între cele două sisteme de coordonate. Atunci această matrice ortogonală este

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{11.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinantul $|D|$ este aici egal cu unitatea. Aceasta este o caracteristică a unei matrice de rotaţie ortogonală. (Pentru o reflexie $|D| = -1$). Minorul corespunzător lui d_{11} este cos α, acela corespunzător lui d_{12} este $-\sin \alpha$ etc., astfel că

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \tag{11.26}$$

Matricea D^{-1} este dată aici printr-o reflexie a elementelor matricei D faţă de diagonala principală. Atunci, în acest caz al matricei ortogonale,

$$D^{-1} = D' \text{ (numai dacă } D \text{ este ortogonală)} \tag{11.27}$$

în care D' reprezintă întotdeauna o matrice care apare prin reflexia elementelor lui D faţă de diagonala principală, ceea ce reprezintă schimbarea liniilor cu coloanele. În acest caz matricea D' este numită transpusa sau adjuncta matricei D. Matricea transpusă a unei matrice ortogonale este întotdeauna egală cu inversa sa.

În continuare, pentru matricele ortogonale un rol important îl joacă aşa-numitele matrice autoadjuncte sau simetrice; o matrice autoadjunctă transpune prin reflexie elementele sale în ele însele. Astfel,

$$A = A' \quad (A \text{ — autoadjunctă}). \tag{11.28}$$

Definiţiile pentru formarea unui produs între matricele transpuse şi cele inverse sînt foarte asemănătoare unele cu altele. Astfel,

$$A' \cdot B' = (B \cdot A)' \tag{11.29}$$

şi

$$A^{-1}B^{-1} = (B \cdot A)^{-1}. \tag{11.30}$$

Atunci, de asemenea,

$$A'B'C' = (CBA)' \tag{11.31}$$

şi

$$A^{-1}B^{-1}C^{-1} = (CBA)^{-1}. \tag{11.32}$$

Unele dintre regulile de înmulţire pentru vectori, ce apar cel mai frecvent, sînt menţionate mai jos

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{11.33}$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot [\vec{c} \times \vec{d}] = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \tag{11.34}$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \times [\vec{c} \times \vec{d}] = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) \cdot \vec{c} - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \cdot \vec{d}. \tag{11.35}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aici grupurile de trei vectori în paranteze sînt determinanţii formaţi din cele trei componente ale fiecărui vector; de exemplu

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}. \qquad (11.36)$$

2. Analiza vectorială

Vectorii pot fi diferenţiaţi şi integraţi după anumite reguli. Dacă în figura 11.1 vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{c}$ nu diferă foarte mult unul de celălalt astfel că $|\vec{b}| \ll |\vec{a}|$, atunci se poate scrie

$$\vec{c} = \vec{a} + \mathrm{d}\vec{a} \qquad (11.37)$$

în care vectorul foarte mic $\vec{b}$ este înlocuit cu diferenţiala $\mathrm{d}\vec{a}$. Asemănător, pe calea adunării unor astfel de diferenţiale $\mathrm{d}\vec{a}$ se poate forma o integrală, astfel

$$\int_{\vec{a}_1}^{\vec{a}_2} \mathrm{d}\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1. \qquad (11.38)$$

Mult mai important decît această integrare de vectori puri este aceea a produselor scalare, în care unul dintre factori este o diferenţială vectorială. În anumite condiţii, calculele pot fi mult simplificate folosind astfel de integrale. De o importanţă particulară în fizica reactorului este teorema lui Gauss, în care un element de suprafaţă apare ca o diferenţială vectorială. Ea va fi dedusă în cele ce urmează:

Considerăm un element de suprafaţă, de arie infinitezimală, $\mathrm{d}\vec{s}$, într-un anumit punct al unui reactor omogen. Deoarece un element infinitezimal de suprafaţă are întotdeauna o orientare în spaţiu, îl putem reprezenta ca un vector şi, de fapt, acest vector $\mathrm{d}\vec{s}$ are direcţia normalei la suprafaţă şi mărimea $|\mathrm{d}\vec{s}|$. Într-un punct al elementului de suprafaţă $\mathrm{d}\vec{s}$, densitatea curentului de difuzie este $\vec{j}$; $\vec{j}$ este, de asemenea, un vector (spre deosebire de fluxul de neutroni Φ), deoarece neutronii se mişcă prin difuzie, în medie într-o direcţie preferenţială. Numărul de neutroni care se scurg pe secundă prin elementul de suprafaţă $\mathrm{d}\vec{s}$ este, conform

definiției lui $\vec{j}$ (vezi capitolul 2), $|\vec{j}| \cdot |\vec{ds}|$[1], dacă vectorii $\vec{j}$ și $\vec{ds}$ au aceeași direcție. Dacă $\vec{j}$ face un unghi α cu $\vec{ds}$, atunci numărul de neutroni ce se scurg pe secundă prin $\vec{ds}$ este

$$|\vec{j}| \cdot |\vec{ds}| \cdot \cos\alpha = \vec{j} \cdot \vec{ds}. \qquad (11.39)$$

Să considerăm acum un element de volum de formă oarecare din interiorul reactorului (fig. 11.2) care este apoi subdivizat în foarte multe volume mici dV. Să alegem un astfel de subvolum și să stabilim așa cum am făcut în capitolul 2, paragraful 2, condiția pentru bilanțul de neutroni care difuzează.

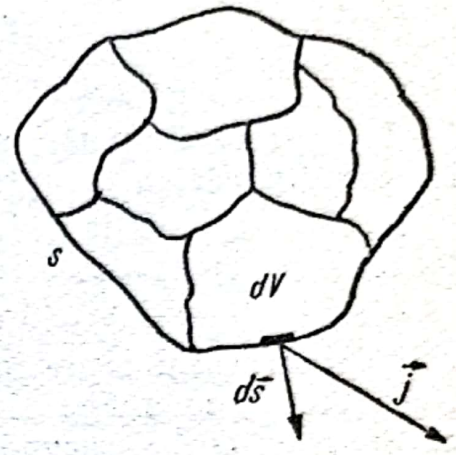


Fig. 11.2.

Pentru aceasta integrăm ecuația (11.39) pe întreaga suprafață a micului volum dV și atunci obținem numărul de neutroni care se scurg în afara lui dV, pe secundă. În cazul stării staționare, acest număr este egal cu numărul de neutroni ce intră în dV pe secundă. Dacă definim acum numărul de neutroni nou apăruți pe cm³ și secundă prin expresia $\operatorname{div}\vec{j}$, atunci

$$dV \cdot \operatorname{div}\vec{j} = \int\limits_{\substack{\text{suprafața} \\ \text{lui } dV}} \vec{j} \cdot \vec{ds} \qquad (11.40)$$

sau

$$\operatorname{div}\vec{j} = \lim_{dV \to 0} \frac{1}{dV} \int\limits_{dV} \vec{j} \cdot \vec{ds}. \qquad (11.41)$$

Expresia $\operatorname{div}\vec{j}$ este aici o funcție dependentă de poziție care urmează să fie stabilită.

Să integrăm acum ecuația (11.40) pe întreg volumul V, aplicînd relația (11.40) tuturor elementelor dV conținute în V și adunîndu-le. Se va remarca că toate produsele $(\vec{j} \cdot \vec{ds})$ din interiorul lui V se elimină, deoarece trebuie să dăm aceleași direcții lui $\vec{ds}$ pentru toate elementele dV. În general, se consideră elementele de suprafață $\vec{ds}$ pozitive dacă direcția lor este spre exteriorul volumului închis. În acest sens, elementele de suprafață a două volume dV învecinate au direcții opuse, în

[1]) Barele verticale marchează din nou mărimile vectorilor.

Scanned with OKEN Scanner

timp ce vectorul $\vec{j}$ are aceeaşi direcţie pentru ambele elemente. Atunci, în integrarea asupra întregului volum, în partea dreaptă a ecuaţiei (11.40), numai suprafaţa exterioară a volumului V are o contribuţie, astfel că

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j}\, dV = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}. \tag{11.42}$$

Integr area din partea stîngă este extinsă asupra întregului volum V, iar cea din partea dreaptă asupra întregii suprafeţe S.

Astfel, în ecuaţia (11.42) — teorema lui Gauss — am obţinut o formulă care permite să se schimbe o integrală de volum cu o integrală de suprafaţă. Desigur, în această formă ea este puţin folositoare pentru noi, deoarece nu reprezintă mai mult decît definiţia cantităţii $\operatorname{div} \vec{j}$. Dacă totuşi, ne reamintim că în ecuaţia (2.53) numărul de neutroni ce apar pe cm^3 şi secundă a fost dat de expresia

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \tag{11.43}$$

atunci avem deja stabilită expresia lui $\operatorname{div} \vec{j}$, care, conform definiţiei de mai sus, este numărul de neutroni ce apar pe cm^3 şi secundă, pentru un sistem cartezian de coordonate

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}. \tag{11.44}$$

j_x, j_y, j_z sînt aici proiecţiile vectorului $\vec{j}$ pe axele x, y, z şi deci coordonatele sale.

Cantitatea $\operatorname{div} \vec{j}$ este numită divergenţa vectorului $\vec{j}$ şi este o măsură a producerii de neutroni. Pentru acest motiv ea este numită şi putere a sursei. Avantajul ecuaţiei (11.42) constă în aceea că expresiile $\operatorname{div} \vec{j}$ şi $\vec{j} \cdot d\vec{s}$ sînt cantităţi care nu depind de alegerea sistemului de coordonate, ci sînt aproape general valabile. Se poate opera cu concepte ca $\operatorname{div} \vec{j}$, grad Φ, $\nabla^2\Phi$, fără a fi necesar să se introducă expresiile ce le corespund în diferite sisteme de coordonate.

Divergenţa se poate exprima în diferite sisteme de coordonate pe o cale similară cu cea folosită pentru operatorul ∇^2 în capitolul 2, paragraful 2.

În coordonate carteziene

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \tag{11.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

în coordonate cilindrice

$$\operatorname{div}\vec{j}=\frac{\partial j_r}{\partial r}+\frac{j_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial j_z}{\partial z} \tag{11.45}$$

în coordonate sferice

$$\operatorname{div}\vec{j}=\frac{\partial j_r}{\partial r}+\frac{2j_r}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(j_\theta\sin\theta). \tag{11.46}$$

Coordonata r este, în coordonate cilindrice, distanţa măsurată de la axa cilindrului, iar în coordonate sferice distanţa măsurată de la centrul sferei. În ambele cazuri φ este unghiul azimutal, z coordonata în direcţia axei cilindrului, iar θ unghiul polar. Indicele lui j arată în fiecare caz coordonata faţă de care este luată proiecţia lui $\vec{j}$.

O teoremă similară teoremei lui Gauss este a ceea a lui Stokes. Deoarece ea joacă un rol minor în calculul reactorului, va fi dată fără demonstraţie. Ea transformă o integrală de suprafaţă într-o integrală de linie şi anume

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{b}\cdot d\vec{s}=\int_C \vec{b}\cdot d\vec{l}. \tag{11.47}$$

Aici $\vec{b}$ este orice vector, S o suprafaţă curbă, nenecesar închisă, spre deosebire de suprafaţa volumului din teorema lui Gauss, $d\vec{s}$ este un element de suprafaţă orientat aflat pe S, C curba care mărgineşte suprafaţa S şi $d\vec{l}$ un element de linie vectorial al curbei C, conform relaţiei (11.37). Expresia rot $\vec{b}$ înseamnă rotorul vectorului $\vec{b}$ şi este un vector.

Natural, S poate fi şi o suprafaţă închisă. Partea dreaptă a ecuaţiei (11.47) atunci dispare. Deoarece în partea stîngă integrala închisă asupra produsului a doi vectori se menţine, se poate utiliza teorema lui Gauss asupra volumului mărginit de suprafaţa S

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{b}\cdot d\vec{s}=\int_V \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b}\,dV=0. \tag{11.48}$$

Integrala din dreapta poate fi extinsă asupra oricărui volum V. Rezultă că

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b}\equiv 0. \tag{11.49}$$

Am obţinut, astfel, o proprietate importantă a vectorului rot $\vec{b}$: divergenţa vectorului rotor este întotdeauna nulă. De aici se poate vedea că nu orice cîmp de vectori poate fi descris ca vectorul rotor al unui alt vector, ceea ce ar avea cîteva avantaje pentru calcul. Pentru aceasta

Scanned with OKEN Scanner

este necesar ca cîmpul să fie lipsit de sursă. Densitatea curentului de difuzie $\vec{j}$, de exemplu, nu poate fi descrisă ca rotaţia unui alt vector, deoarece oriunde în reactor neutronii apar sau dispar.

Pe o cale similară se poate calcula expresia rotorului în diferite sisteme de coordonate. În coordonate carteziene el este

$$\text{rot}\,\vec{b}=\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\vec{e}_1+\left(\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x}\right)\vec{e}_2+\left(\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\vec{e}_3 \qquad (11.50)$$

în coordonate cilindrice

$$\text{rot}\,\vec{b}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial b_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial b_\varphi}{\partial z}\right)\vec{r}_0+\left(\frac{\partial b_r}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial r}\right)\vec{\varphi}_0+\left(\frac{\partial (rb_\varphi)}{\partial r}-\frac{\partial b_r}{\partial \varphi}\right)\frac{\vec{e}_3}{r} \qquad (11.51)$$

în coordonate sferice

$$\text{rot}\,\vec{b}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial b_\varphi \sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\partial b_\theta}{\partial \Phi}\right)\vec{r}_0+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial b_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial (rb_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{\theta}_0+$$

$$+\left(\frac{\partial (rb_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial b_r}{\partial\theta}\right)\frac{\vec{\varphi}_0}{r}. \qquad (11.52)$$

Aici indicii sînt aceiaşi ca în ecuaţiile (11.44) — (11.46). Cantităţile $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{r}_0$, $\vec{\varphi}_0$ şi $\vec{\theta}_0$ sînt vectori unitari în direcţiile x, y, z, r, φ şi θ.

Al treilea operator diferenţial simplu care apare în calculul reactorului în afară de divergenţă şi rotor este vectorul gradient.

Pentru a explica conceptul de gradient, să considerăm în reactor o cantitate dependentă de poziţie, de exemplu fluxul de neotroni Φ. Vectorul $\vec{r}$ dă dependenţa de poziţie. Legătura între Φ şi $\vec{j}$ ne este deja cunoscută din teoria difuziei (vezi ecuaţia (2.54))

$$j_x=-D\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad j_y=-D\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad j_z=-D\frac{\partial\Phi}{\partial z} \qquad (11.53)$$

Aceste trei ecuaţii date în coordonate carteziene sînt îmbinate într-o singură ecuaţie

$$\vec{j}=-D\,\text{grad}\,\Phi. \qquad (11.54)$$

Vectorul grad Φ este independent de alegerea sistemului de coordonate. Pentru cele trei sisteme de coordonate, cu aceleaşi notaţii,

în coordonate carteziene

$$\text{grad}\,\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{e}_1+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{e}_2+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_3 \qquad (11.55)$$

Scanned with OKEN Scanner

în coordonate cilindrice

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_3 \tag{11.56}$$

în coordonate sferice

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{\theta}_0 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0. \tag{11.57}$$

Gradientul sau panta unei funcţii este o măsură a vitezei sale de variaţie cu poziţia.

Există o legătură similară între vectorii rot şi grad ca şi între vectorii div şi rot. Prin combinarea ecuaţiilor (11.55) şi (11.50) se obţine relaţia pentru coordonatele carteziene, carese aplică în general

$$\text{rot grad } \Phi = 0.$$

Deoarece rotorul nu se anulează pentru orice cîmp de vectori, nu orice vector poate fi reprezentat ca gradient al unei funcţii spaţiale Φ. Densitatea curentului de difuzie $\vec{j}$ este gradientul fluxului de neutroni Φ. Atunci rot $\vec{j}$ se anulează

$$\text{rot } \vec{j} = 0. \tag{11.58}$$

Operatorul ∇^2 pe care l-am utilizat va fi descris cu ajutorul analizei vectoriale ca ultimul şi cel mai important operator diferenţial. Operatorul ∇^2 este definit ca divergenţa unui gradient. Astfel,

$$\nabla^2 \Phi = \text{div grad } \Phi \tag{11.59}$$

în care pentru acest mod de scriere condiţia (11.58) trebuie să fie din nou indeplinită.

Teorema lui Gauss, respectiv ecuaţia (11.42), devine atunci

$$\int_V \nabla^2 \Phi \, dV = \int_S \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s}. \tag{11.60}$$

Comparativ cu ecuaţia (11.42), ecuaţia (11.60) oferă avantajul că nu trebuie folosit vectorul $\vec{j}$, care, datorită celor trei componente ale sale, este greu de manevrat, ci poate fi înlocuit cu mărimea scalară Φ. Acest avantaj apare din ecuaţia (11.58) sau (11.54).

Volumul V din ecuaţia (11.60) poate avea orice valoare. Dacă, ca şi în capitolul 2, paragraful 2, îl alegem de 1 cm^3, atunci în partea stîngă există excesul de neutroni produşi pe secundă în acest cm^3, iar în dreapta numărul de neutroni ce se scurg din el. În cazul stării staţionare se

Scanned with OKEN Scanner

aplică deci ecuaţia (11.60). Dacă V este volumul întregii zone active a reactorului, atunci partea stîngă a ecuaţiei (11.60) este excesul de neutroni produs în întreaga zonă activă, iar partea dreaptă numărul de neutroni ce se scurg din zonă. Se poate vedea deci, că formula dedusă aici descrie fenomenul discutat în capitolul 2, paragraful 2. Aceste formule au avantajul de a fi valabile în orice sistem de coordonate.

Operatorul ∇^2 poate fi scris în cele trei sisteme de coordonate. Pentru sistemul cartezian avem

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{11.61}$$

pentru coordonatele cilindrice

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{11.62}$$

iar pentru coordonatele sferice

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \tag{11.63}$$

Dacă nu există o dependenţă unghiulară a lui Φ, ecuaţiile (11.62) şi (11.63) se simplifică şi devin ecuaţiile (2.31) şi (2.30), deja deduse pentru sistemele de coordonate cilindrice şi sferice.

Înainte de a continua cu teoremele integrale, să menţionăm unele reguli privind operatorii diferenţiali. Aceste reguli se obţin introducînd, formal, un operator ∇ (se citeşte nabla) în acelaşi mod cum am făcut în ecuaţia (2.25) cu operatorul ∇^2. În sistemul cartezian, de exemplu

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_3. \tag{11.64}$$

Cu ajutorul acestui simbol se poate considera gradientul unei cantităţi Φ, ca produsul operatorului ∇ cu scalarul Φ

$$\nabla\cdot\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_3. \tag{11.65}$$

Divergenţa unui vector $\vec{a}$ se obţine prin produsul scalar al lui ∇ cu $\vec{a}$

$$\nabla\cdot\vec{a} = \operatorname{div}\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_3\right)(a_x\vec{e}_1 + a_y\vec{e}_2 + a_z\vec{e}_3) =$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{11.66}$$

Scanned with OKEN Scanner

și vectorul rotor, prin produsul vectorial

$$\nabla \times \vec{a} = \operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_3 . \quad (11.67)$$

Operatorul ∇ este, de asemenea, independent de coordonate. La folosirea sa în produsele scalare sau vectoriale, trebuie să se țină seama de anumite reguli: operatorul ∇ este un operator diferențial. La aplicarea sa asupra unor produse se respectă regulile calculului diferențial. El nu poate fi deci schimbat cu factorul căruia i se aplică. Mai mult, este necesar să ținem seama de necomutativitatea cu anumite operații vectoriale.

De exemplu, următoarele formule sînt obținute cu ajutorul operatorului ∇

$$\nabla \cdot \Phi\vec{a} = \Phi(\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot \nabla\Phi \quad (11.68)$$

$$\nabla \times (\Phi\vec{a}) = \Phi(\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \times \nabla\Phi \quad (11.69)$$

$$\nabla \cdot \Phi'\nabla\Phi = \Phi'\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)(\nabla\Phi'). \quad (11.70)$$

Să revenim acum la teorema lui Gauss și să discutăm o dezvoltare a sa, des utilizată, cunoscută ca teorema lui Green.

Dacă se aplică teorema lui Gauss (11.42), nu vectorului grad Φ, ci produsului unui scalar Φ' cu vectorul grad Φ, atunci se obține

$$\int_V \operatorname{div}(\Phi' \cdot \operatorname{grad} \Phi)\,dV = \int_S \Phi'(\operatorname{grad} \Phi \cdot d\vec{s}). \quad (11.71)$$

Cu ajutorul operatorului ∇ integrantul din partea stîngă a aceste ecuații este $(\nabla, \Phi' \nabla\Phi)$. Avem deja explicitat acest produs în ecuația (11.70), care scris complet este

$$\operatorname{div}(\Phi' \operatorname{grad} \Phi) = \Phi'\nabla^2\Phi + \operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \Phi'. \quad (11.72)$$

Dacă înlocuim ecuația (11.72) în ecuația (11.71), obținem prima formă a teoremei lui Green

$$\int_V \Phi\nabla^2\Phi'\,dV + \int_V (\operatorname{grad} \Phi \operatorname{grad} \Phi')\,dV = \int_S \Phi' (\operatorname{grad} \Phi . d\vec{s}). \quad (11.73)$$

Mai des se întîlnește forma simetrică, care se obține transcriind ecuație (11.73) prin schimbarea lui Φ cu Φ'

$$\int_V \Phi\nabla^2\Phi'\,dV + \int_V (\operatorname{grad} \Phi' \operatorname{grad} \Phi)\,dV = \int_S \Phi (\operatorname{grad} \Phi' \cdot d\vec{s})$$

Scanned with OKEN Scanner

și scăzînd cele două ecuații una din alta

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \Phi' - \Phi' \nabla^2 \Phi) dV = \int_S (\Phi \text{ grad } \Phi' - \Phi' \text{ grad } \Phi) \cdot \vec{ds}. \quad (11.74)$$

Noi am folosit această teoremă a lui Green în capitolul 3. Acolo s-a pus condiția ca Φ și Φ' să se anuleze la marginea zonei active, astfel că partea dreaptă a ecuației (11.74) a devenit nulă. Φ' era fluxul perturbat de neregularitățile zonei active, iar Φ distribuția neperturbată a fluxului.

Din numărul mare de aplicații posibile ale formulei lui Green, să menționăm numai una. Ea apare într-un tip de calcul de perturbație.

Să începem cu ecuația de difuzie pentru neutronii termici

$$\nabla^2 \Phi + B^2 \Phi = 0. \quad (11.75)$$

Ca și în capitolul 3, factorul de formă este necesar să fie constant în zona activă, dar dependent într-o oarecare măsură de poziție, astfel că putem scrie

$$B^2 = B_0^2 + \frac{\varepsilon(\vec{r})}{D}, \quad (11.76)$$

Constanta de difuzie a fost formal inclusă, astfel că produsul $\varepsilon\Phi_0$, care apare mai jos, ar fi o sursă de intensitate avînd dimensiunile neutroni pe cm^3 și secundă.

B_0 este factorul geometric, în medie constant, iar $\varepsilon(\vec{r})/D$ o perturbație geometrică mică a sa, dependentă de poziție.

Scriem fluxul Φ, de asemenea ca suma fluxului normal Φ_0, care corespunde ecuației

$$\nabla^2 \Phi_0 + B_0^2 \Phi = 0 \quad (11.77)$$

și o mică perturbație $\varphi(\vec{r})$ a lui Φ_0

$$\Phi = \Phi_0 + \varphi(\vec{r}). \quad (11.78)$$

Din ecuația (11.75), cu aceste definiții, obținem

$$\nabla^2 \Phi_0 + \nabla^2 \varphi + B_0^2 \Phi_0 + B_0^2 \varphi + \frac{\varepsilon}{D} \Phi_0 + \frac{\varepsilon}{D} \varphi = 0. \quad (11.79)$$

Primul și al treilea termen se anulează în baza ecuației (11.77). Vom neglija ultimul termen ca fiind produsul a două cantități mici, astfel că perturbația de flux rămîne dată de ecuația

$$\nabla^2 \varphi + B_0^2 \varphi = -\frac{\varepsilon(\vec{r})}{D} \Phi_0. \quad (11.80)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta este o ecuație care diferă de cele tratate mai înainte prin aceea că în partea dreaptă apare o funcție.

Aplicăm acum teorema lui Green acestei ecuații diferențiale (11.80), dar trebuie mai întîi să facem niște ipoteze.

Funcția $\varphi(\vec{r})$ care va înlocui funcția Φ în teorema lui Green (ecuația (11.74)) trebuie, ca și Φ_0, să se anuleze la marginea zonei active, astfel că

$$\varphi(\vec{r})_{\text{suprafață}} = 0. \tag{11.81}$$

Mai mult, trebuie să determinăm funcția $\Phi'(\vec{r})$ din ecuația (11.74), care poate fi aleasă liber. Îi cerem să satisfacă ecuația diferențială

$$\nabla^2\Phi' + B_0^2\Phi' = 0. \tag{11.82}$$

În plus, ea trebuie să fie o soluție a ecuației (11.82) în coordonate sferice, adică

$$\Phi'(\vec{r}) = \frac{\exp[iB_0|\vec{r}-\vec{r}_0|]}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}; \tag{11.83}^{1)}$$

Aici, $\vec{r}_0$ este un punct fix din interiorul reactorului, $|\vec{r}-\vec{r}_0|$ este distanța unui punct variabil la acest punct r_0. Φ' descrie o undă neutronică de difuzie emisă din punctul $\vec{r}_0$, care nu există în realitate, ci are rolul unei funcții auxiliare.

Dacă aplicăm teorema lui Green (11.74) ecuațiilor (11.80) și (11.81), atunci obținem în partea stîngă folosind ecuația (11.83)

$$\int_V -\frac{\varepsilon(\vec{r})}{D}\Phi'\Phi_0 dV = -\int_V \frac{\varepsilon(\vec{r})}{D}\Phi_0 \frac{\exp[iB_0|\vec{r}-\vec{r}_0|]}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} dV \tag{11.84}$$

unde pentru volumul V luăm volumul zonei active a reactorului.

La evaluarea părții drepte a ecuației (11.74) trebuie să ne reamintim că funcția Φ' are o singularitate de ordinul întîi în punctul $\vec{r}_0$. Excludem deci imediata vecinătate a acestui punct din volumul de integrare. Eliminarea vecinătății lui $\vec{r}_0$ nu are influență asupra integralei de volum, dar are un efect considerabil asupra integralei de suprafață a ecuației (11.74). Integrala de suprafață este extinsă asupra întregii suprafețe care mărginește volumul V, și astfel include și suprafața sferică a regiunii excluse. În baza singularității de ordinul întîi a lui Φ', numai primul

[1]) Se folosești aici, ca și în electrotehnică, scrierea în complex. Se reține numai partea reală.

termen al integralei de suprafață are o contribuție. Dacă se micșorează regiunea din jurul lui $\vec{r}_0$, pînă la un punct, se obține

$$4\pi\varphi(\vec{r}_0). \tag{11.85}$$

Deoarece am considerat $\varphi=0$ la marginea zonei active, primul termen al integralei asupra suprafeței exterioare S a zonei active dispare și din ecuația (11.83) avem

$$\int_S \Phi'(\text{grad}\ \varphi \cdot d\vec{s}) = \int_S \frac{\exp[iB_0|\vec{r}-\vec{r}_0|]}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}(\text{grad}\ \varphi \cdot d\vec{s}). \tag{11.86}$$

În final, combinînd ecuațiile (11.74), (11.84), (11.85) și (11.86), obținem

$$\varphi(\vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\varepsilon(\vec{r})}{D}\Phi_0 \frac{\exp[iB_0|\vec{r}-\vec{r}_0|]}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}dV +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\exp[iB_0|\vec{r}-\vec{r}_0|]}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}(\text{grad}\ \varphi \cdot d\vec{s}). \tag{11.87}$$

Astfel, introducînd funcția auxiliară — ecuația (11.83) — reprezentăm perturbația fluxului de neutroni $\varphi(\vec{r}_0)$ în orice punct $\vec{r}_0$ al reactorului sub formă de integrală. Dacă considerăm ecuația (11.80) cu care am început calculul nostru și rezultatul (11.87), rezultă următoarele: ecuația diferențială (11.80) conține un termen $\nabla^2\varphi$ corespunzător difuziei neutronilor, un al doilea termen $B_0^2\varphi$ care apare din diferența dintre viteza de producție și de absorbție a neutronilor în zona activă și un al treilea termen care descrie producerea suplimentară de neutroni, $\Phi_0(\vec{r})\varepsilon(\vec{r})/D$, provocată de perturbarea lui B_0^2. În ecuația (11.87), integrala de volum ia în considerație acest ultim efect. În ea, perturbația φ a fluxului conține contribuția tuturor elementelor de volum dV cuprinse în V. Dacă selectăm unul dintre ele, atunci el produce asupra lui $\varphi(r_0)$ contribuția

$$d\varphi(r_0) = -\frac{1}{4\pi D}\varepsilon(\vec{r})\Phi_0(\vec{r})\frac{\exp[iB_0|\vec{r}-\vec{r}_0|]}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}dV. \tag{11.88}$$

Pentru a explicita această ecuație să considerăm contribuția ca aparținînd unei surse punctuale de intensitate $\varepsilon\Phi_0 dV$, asupra fluxului de neutroni dintr-un reactor, la o distanță r de sursă. Fie B_0 factorul de

Scanned with OKEN Scanner

material al reactorului, astfel că ecuația de difuzie este de forma ecuației (11.77). Soluția în coordonate sferice este

$$\varphi = A \frac{\exp(iB_0 r)}{r}. \tag{11.89}$$

În punctul-sursă $r=0$, φ are o singularitate. A este o constantă care depinde de sursa de intensitate și urmează a fi determinată. În volumul dV, la $r=0$, se produc $\varepsilon\Phi_0 dV$ neutroni pe secundă, neutroni care părăsesc regiunea sursei. Atunci, integrala de suprafață asupra acestei regiuni dV este

$$\varepsilon\Phi_0 dV = \oint (\vec{j}_q \cdot \vec{ds}) \approx 4\pi r_q^2 j_q \tag{11.90}$$

în care j_q este densitatea curentului de difuzie a fluxului sursă și r_q — raza sursei care este de o formă aproximativ sferică.

Pe de altă parte, densitatea fluxului sursă, la r_q, este obținută aproximativ din ecuația (11.89)

$$j_q = -D \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{DA}{r_q^2} \tag{11.91}$$

astfel că constanta A este dată de

$$A = \frac{1}{4\pi D} \varepsilon\Phi_0 dV.$$

Atunci, dacă la fel ca pentru sursa diferențială de intensitate $\varepsilon\Phi_0 dV$, scriem diferențiala $d\varphi$ pentru φ, ecuația (11.89) devine

$$d\varphi(r) = \frac{1}{4\pi D} \varepsilon\Phi_0 \frac{\exp(iB_0 r)}{r} dV. \tag{11.92}$$

Dacă punem din nou distanța între sursă și punctul la care se măsoară $d\varphi$, ca $r = |\vec{r} - \vec{r}_0|$, atunci cele două ecuații (11.92) și (11.88) concordă. Diferența de semn se datorește faptului că în ecuația (11.80) componenta de perturbație $(\varepsilon/D)\Phi_0$ a reprezentat o scădere a numărului de neutroni, în timp ce aici am presupus o sursă producătoare de neutroni.

Astfel, semnificația primei părți a ecuației (11.87) este explicată. Integrala de volum dă contribuția tuturor surselor $\varepsilon\Phi_0 dV$ conținute în volumul V la perturbarea fluxului $\varphi(\vec{r}_0)$ în punctul $\vec{r}_0$.

Integrala de suprafață din ecuația (11.87) are un înțeles asemănător. Această contribuție la perturbația de flux φ, trebuie înțeleasă ca și cum ar descrie intrarea sau ieșirea neutronilor prin marginile zonei active, ca și cînd ar exista un consum de neutroni sau o sursă în exteriorul zonei active. Integrala de suprafață din ecuația (11.87) descrie difuzia

Scanned with OKEN Scanner

neutronilor dintr-o astfel de sursă virtuală prin suprafaţa zonei. Ne vom mai referi la astfel de surse virtuale de suprafaţă.

În calculul perturbaţiei, ultimul efect de margine va fi întotdeauna mic sau poate fi făcut mic, astfel că perturbaţia ia forma

$$\varphi(\vec{r}_0) = -\int_V \frac{\varepsilon\Phi_0}{4\pi D} \frac{\exp(iB_0|\vec{r}-\vec{r}_0|)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\, dV. \tag{11.93}$$

Aplicarea acestei integrale nu este, evident, limitată la calculul perturbaţiei descris aici, ci apare întotdeauna unde dorim să calculăm distribuţia fluxului de neutroni într-un material în care există o sursă spaţială dependentă de poziţie $\rho(\vec{r})$, ca şi în cazul producerii sau absorbţiei de neutroni, proporţionale cu fluxul. Ecuaţia de difuzie pentru astfel de cazuri este

$$\nabla^2\Phi + B^2\Phi = \frac{\rho(\vec{r})}{D}, \tag{11.94}$$

În aceasta, factorul de material este real pentru un mediu multiplicativ şi imaginar pentru un mediu absorbant. Primul caz se aplică, de exemplu, la zona activă, al doilea — la reflector.

Soluţia ecuaţiei (11.94), corespunzătoare ecuaţiei (11.93), este

$$\Phi(\vec{r}_0) = \int_V \frac{\rho}{4\pi D} \frac{\exp(iB_0|\vec{r}-\vec{r}_0|)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\, dV \tag{11.95}$$

pentru B_0 real şi

$$\Phi(\vec{r}_0) = \int_V \frac{\rho}{4\pi D} \frac{\exp(-\varkappa|\vec{r}-\vec{r}_0|)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\, dV \tag{11.96}$$

pentru B_0 imaginar, cu $-\varkappa = iB_0$. Cantitatea

$$\frac{1}{4\pi D} \frac{\exp(-\varkappa|\vec{r}-\vec{r}_0|)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \tag{11.97}$$

este „nucleul" integralei de volum. El depinde de proprietăţile de material. Conform ecuaţiei (11.97), el reprezintă fluxul de neutroni produs la o distanţă $\vec{r}-\vec{r}_0$ de o sursă punctiformă de 1 neutron pe secundă.

Să revenim acum la problema unei surse de neutroni de suprafaţă.

Problema perturbaţiei, care a fost tratată cu formula lui Green, ne-a condus la o ecuaţie diferenţială (11.94), pentru o sursă distribuită în volumul V. Problema unei surse de neutroni de suprafaţă poate fi tratată în acelaşi mod. Pentru aceasta folosim din nou formula lui

Scanned with OKEN Scanner

Green, dar selectăm regiunea suficient de mare, în care ne propunem să calculăm fluxul de neutroni, astfel încît să nu apară efecte de margine.

Considerăm o sursă de neutroni de suprafaţă care acoperă complet o fereastră de arie S' de o parte a regiunii. Să calculăm fluxul de neutroni $\Phi(\vec{r}_0)$ în punctul $\vec{r}_0$ din interiorul regiunii: facem din nou uz pentru aceasta de o funcţie auxiliară, funcţia lui Green. Fie funcţia lui Green, G, avînd următoarele proprietăţi

$$\nabla^2 G + B^2 G = 0 \tag{11.98}$$

$$G_{suprafaţă} = 0 \tag{11.99}$$

$$\lim_{|\vec{r}-\vec{r}_0|\to 0} G = \frac{\exp(iB|\vec{r}-\vec{r}_0|)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}. \tag{11.100}$$

Atunci funcţia lui Green satisface aceeaşi ecuaţie diferenţială ca şi ecuaţia de difuzie în volumul V

$$\nabla^2 \Phi + B^2 \Phi = 0. \tag{11.101}$$

Consecinţa directă a acestui fapt este că în ecuaţia lui Green (11.74) partea din stînga se anulează dacă înlocuim pe Φ' prin G.

În al doilea rînd, funcţia lui Green se anulează pe întreaga suprafaţă a lui V şi, deci, şi în regiunea ferestrei. Atunci al doilea termen din integrala de suprafaţă a ecuaţiei (11.74) se anulează.

În al treilea rînd, am cerut ca funcţia Green să se comporte în jurul punctului $\vec{r}=\vec{r}_0$ ca şi funcţia $\Phi'(\vec{r})$ din ecuaţia (11.83). Atunci în punctul $\vec{r}=\vec{r}_0$ funcţia lui Green are o singularitate şi trebuie să excludem vecinătatea imediată a lui $\vec{r}_0$ din integrare. Ca şi în ecuaţia (11.85) integrala de suprafaţă asupra acestei regiuni excluse dă

$$4\pi\Phi(\vec{r}_0). \tag{11.102}$$

În final, trebuie să cerem funcţiei Green ca gradientul său să scadă suficient de rapid cu distanţa, astfel ca integrala de suprafaţă excluzînd fereastra să nu contribuie semnificativ la fluxul $\Phi(\vec{r}_0)$. Suprafaţa care trebuie să fie luată în consideraţie, în afară de suprafaţa regiunii excluse, este numai suprafaţa ferestrei, astfel că obţinem

$$4\pi\Phi(\vec{r}_0) = -\int_S \Phi(\vec{r})\ (\text{grad}\ G \cdot \vec{ds}). \tag{11.103}$$

Integrala poate fi extinsă asupra întregii suprafeţe conţinînd fereastra, deşi în practică numai fereastra însăşi, conţinînd sursa, are o contribuţie. Presupunem că în regiunea rămasă S, Φ se anulează.

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie să calculăm funcţia lui Green, a cărei formă precisă este determinată de geometria suprafeţei S. De fapt, cazul unui plan este singurul în care aplicarea funcţiei lui Green este utilă: chiar dacă S are o formă simplă, sferică de exemplu, formula lui Green conduce la o formulă aproximativă incomodă.

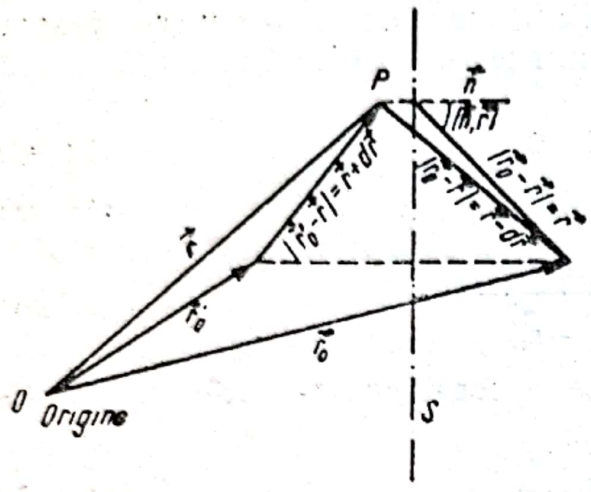


Fig. 11.3.

Pentru calculul funcţiei lui Green, pentru un plan, folosim figura 11.3. Satisfacem condiţia (11.99), care cere anularea lui G pe plan, postulînd existenţa unei absorbţii punctuale în punctul $\vec{r}_0'$ de reflexie a punctului $\vec{r}_0$ faţă de S. Aceasta produce o distribuţie negativă de flux $-\exp(iB|\vec{r}-\vec{r}_0'|)/|\vec{r}-\vec{r}_0|$. Este evident că o astfel de absorbţie virtuală nu poate exista în realitate. Totuşi, funcţia Green este desigur numai o cantitate auxiliară fără un sens fizic real. Funcţia Green a planului care satisface condiţiile (11.98)—(11.100) este

$$G=\frac{\exp(iB|\vec{r}-\vec{r}_0|)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}-\frac{\exp(iB|\vec{r}-\vec{r}_0'|)}{|\vec{r}-\vec{r}_0'|}. \qquad (11.104)$$

Formăm gradientul lui G pe planul S care ne trebuie pentru ecuaţia (11.103) conform figurii 11.3, deplasînd puţin punctul de intersecţie P al razei vectoare $|\vec{r}-\vec{r}_0|=r$ şi $|\vec{r}-\vec{r}_0'|=r$ din planul S. Dacă notăm vectorul $|\vec{r}-\vec{r}_0'|$ din r_0' la punctul P prin $r-\mathrm{d}r$ şi acela din r_0 la P prin $r+\mathrm{d}r$, atunci în acest punct din vecinătatea planului, funcţia lui Green devine

$$\mathrm{d}G=\frac{\exp[iB(r+\mathrm{d}r)]}{r+\mathrm{d}r}-\frac{\exp[iB(r-\mathrm{d}r)]}{r-\mathrm{d}r}=2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\exp[iBr]}{r}\mathrm{d}r. \qquad (11.105)$$

În produsul scalar $(\mathrm{grad}\ G\cdot\vec{\mathrm{d}s})$ cei doi vectori sînt, în acest caz, paraleli. Trebuie să înmulţim mărimea gradientului lui G prin mărimea elementului de suprafaţă. Rezultă din ecuaţia (11.105) şi figura 11.3 că

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=2\frac{\partial}{\partial r}\frac{\exp(iBr)}{r}\cos(n,r) \qquad (11.106)$$

în care $\partial G/\partial n$ reprezintă derivata funcţiei Green în raport cu normala la S, iar $\cos(n, r)$ cosinusul unghiului dintre direcţia normalei şi r.

Scanned with OKEN Scanner

Derivata funcției lui Green în raport cu r este

$$\frac{dG}{dr} = \left(\frac{iB}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \exp(iBr). \tag{11.107}$$

Prin substituirea ecuației (11.107) în (11.103), obținem

$$\Phi(\vec{r}_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \Phi(\vec{r}) \left(\frac{iB}{r} - \frac{1}{r^2}\right) \exp(iBr) \cos(n, r) ds. \tag{11.108}$$

Factorul $\cos(n, r)$ din această ecuație se datorește faptului că fereastra văzută sub unghi (n, r) apare mai mică cu un factor $\cos(n, r)$ decît este în realitate. Datorită acestui fapt, fluxul Φ în punctul $\vec{r}_0$ este, de asemenea, mai mic cu același factor.

Mai mult, ecuația (11.108) arată că fluxul $\Phi(\vec{r}_0)$ este format din două părți. Primul termen, implicînd iB/r, este dominant la distanță mare față de fereastră, al doilea termen, cu $1/r^2$, în apropiere. În general, vom considera numai unul din acești doi termeni, după cum $\vec{r}_0$ se găsește aproape sau departe de fereastră. Factorul B caracterizează această distanță, și anume

$$\begin{aligned} r &\ll 1/B \quad \text{(apropiat de fereastră)} \\ r &\gg 1/B \quad \text{(la distanță de fereastră).} \end{aligned} \tag{11.109}$$

Pentru a trata problema unei surse de suprafață, se poate determina funcția lui Green astfel ca gradientul său să se anuleze pe planul S. Atunci în ecuația corespunzătoare ecuației (11.103), în locul lui $\Phi(\vec{r})$ sub integrală apare gradientul lui $\Phi(\vec{r})$ și în locul gradientului lui G, apare însăși funcția lui Green. În general, condiția $\Phi(\vec{r}) = 0$ pe suprafața S la exteriorul ferestrei este mai bine satisfăcută decît condiția grad $\Phi(\vec{r}) = 0$.

Formula care se obține, dacă admitem că grad G se anulează pe planul S, este

$$\Phi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S G(\operatorname{grad} \Phi \cdot d\vec{s}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\exp(iB|\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} (\operatorname{grad} \Phi \cdot d\vec{s}) \tag{11.110}$$

în concordanță cu cea de-a doua parte a ecuației (11.87).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XII

INTEGRALE ŞI SERII FOURIER FUNCŢII CILINDRICE ŞI SFERICE

Dacă se trece de la ecuaţia de difuzie a unui reactor într-o stare staţionară

$$\nabla^2\Phi + B^2\Phi = 0 \tag{12.1}$$

la ecuaţia dependentă de timp corespunzătoare

$$\nabla^2\Phi + B^2\Phi = \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{12.2}$$

atunci este necesar să ne reamintim că schimbarea fluxului de neutroni în raport cu timpul va fi diferită pentru diverse puncte ale zonei active. Această dependenţă spaţială va fi discutată în paragraful următor.

Să scriem ecuaţia (12.2) în coordonate carteziene, limitîndu-ne la o singură dimensiune x. Vom descrie, deci, un reactor care este infinit de mare pe direcţiile y şi z şi în care fluxul de neutroni se schimbă numai în direcţia x. Fie grosimea acestui reactor x_1 şi să presupunem că factorul de material B este real în timp. Ecuaţia (12.2) devine atunci

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + B^2\Phi = \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{12.3}$$

Presupunînd o soluţie separabilă ca şi în capitolul 2 la rezolvarea ecuaţiei (2.81), de forma $\Phi = R(x)\cdot T(t)$, obţinem

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + B^2 = \frac{1}{aT}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}. \tag{12.4}$$

Deoarece partea din stînga este o funcţie de x, iar partea din dreapta o funcţie de t, putem egala ambele părţi cu o constantă $-K^2$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + (B^2 + K^2)R = 0 \tag{12.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + aK^2T = 0. \tag{12.6}$$

Rezultă din ecuaţiile (12.5) şi (12.6) că pentru $\Phi = R(x)T(t)$, avem

$$\Phi(x, t) = A\cos(B^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}x\exp(-aK^2t). \tag{12.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fluxul de neutroni $\Phi(x, t)$ trebuie să se anuleze în orice moment pe planele $x=+x_1/2$ și $x=-x_1/2$, astfel că trebuie să avem

$$(B^2+K^2)^{\frac{1}{2}}=n\frac{\pi}{x_1} \tag{12.8}$$

în care n este un număr întreg.

Este de remarcat că în ecuația (2.127), corespunzătoare ecuației (12.8), cînd am stabilit factorul B, am considerat numărul n ca fiind egal cu unitatea, deși, strict vorbind, acolo ar fi trebuit, de asemenea, să scriem $k_x=n\pi/x_1$. Vom vedea totuși de ce am egalat numărul n cu 1 în capitolul II, pentru cazul stării staționare.

Dacă substituim K din ecuația (12.8) în ecuația (12.7), atunci

$$\Phi(x, t)=A\cos\left(n\frac{\pi}{x_1}x\right)\exp\left[-a\left(\frac{n^2\pi^2}{x_1^2}-B^2\right)t\right]. \tag{12.9}$$

Pentru fiecare valoare a lui n, (12.9) este o soluție a ecuației de difuzie (12.3). În consecință, o sumă de astfel de soluții trebuie să fie, de asemenea, o soluție a ecuației (12.3), astfel că

$$\Phi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi}{x_1}x\right)\exp\left[-a\left(\frac{n^2\pi^2}{x_1^2}-B^2\right)t\right] \tag{12.10}$$

în care A_n sînt constante determinate de condițiile inițiale. În primul rînd să introducem condiția de criticitate pentru acest reactor unidimensional în ecuația (12.10). Aceasta este, conform ecuației (2.127),

$$B^2=\frac{\pi^2}{x_1^2}. \tag{12.10 a}$$

Din ecuația (12.10), avem deci

$$\Phi(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\frac{\pi}{x_1}x\right)\exp\left[-a\frac{\pi^2}{x_1^2}(n^2-1)t\right]. \tag{12.11}$$

Pentru a determina pe A_n considerăm funcția $\Phi(x, t)$ la momentul $t=0$

$$\Phi(x, 0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\frac{\pi}{x_1}x\right). \tag{12.12}$$

Presupunem acum că la momentul $t=0$, fluxul de neutroni a avut o formă care nu coincide cu aceea din cazul stării staționare $\Phi=A\cos(\pi x/x_1)$, ci în oarecare măsură este distorsionată, datorită surselor artificiale de neutroni și substanțelor absorbante, de exemplu, barele de control care au fost introduse în reactor. Vom reține condiția

Scanned with OKEN Scanner

la limită $\Phi(\pm x_1/2, t)=0$. Presupunem că curba din figura 12.1 reprezintă această distribuţie iniţială de flux $\Phi(x, 0)$. Funcţia $\Phi(x, 0)$ este dată de ecuaţia (12.12) sub forma unei serii Fourier şi obţinem constanta A_n înmulţind ecuaţia (12.12) în ambele părţi cu funcţia $\cos(\nu\pi x/x_1)$ şi integrînd-o peste o perioadă:

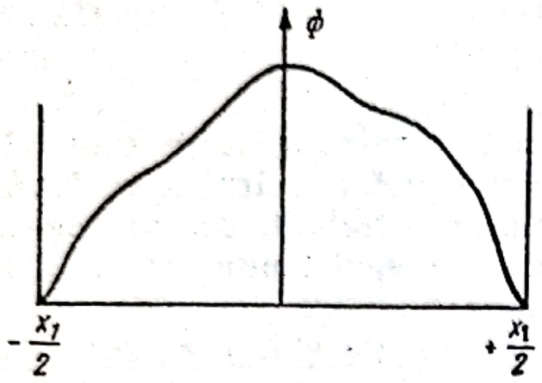


Fig. 12.1.

$$\int_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \cos\left(\nu \frac{\pi}{x_1} \xi\right) d\xi =$$

$$= \int_{(2x_1)} \cos\left(\nu \frac{\pi}{x_1} \xi\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{\pi}{x_1} \xi\right) d\xi. \tag{12.13}$$

Aici perioada este notată prin $2x_1$ şi variabila de integrare x este înlocuită cu ξ. ν este un întreg ca şi n.

În partea dreaptă a ecuaţiei (12.13) cînd $n=\nu$ apare numai un termen diferit de zero. Astfel

$$\int_{(2x_1)} \cos\left(n \frac{\pi}{x_1} \xi\right) \cos\left(\nu \frac{\pi}{x_1} \xi\right) d\xi = \begin{cases} x_1 & \text{pentru } n=\nu \\ 0 & \text{pentru } n\neq\nu. \end{cases} \tag{12.14}$$

Funcţiile care satisfac o condiţie de acest tip sînt numite funcţii ortogonale. Vom reveni mai tîrziu asupra proprietăţilor de ortogonalitate a anumitor funcţii.

Din ecuaţiile (12.13) şi (12.14) rezultă

$$A_n = \frac{1}{x_1} \int_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \cos\left(n \frac{\pi}{x_1} \xi\right) d\xi. \tag{12.15}$$

Astfel, constantele A_n din ecuaţia (12.11) se determină cu ajutorul condiţiilor iniţiale $\Phi(x, 0)$. După aceea, se va încerca să se elimine distorsiunea astfel că distribuţia de flux să tindă gradat către distribuţia $\cos(\pi x/x_1)$. Ecuaţia (12.11) descrie acest proces de nivelare.

Vedem că nivelarea componentelor Fourier de ordin mare, ale lui $\Phi(x, 0)$ pentru valori mari ale lui n are loc mult mai rapid decît pentru valori mici ale lui n şi acum devine clar de ce în capitolul 2 am egalat pe n cu unitatea: componenta $n=1$ este singura componentă staţionară. Fiecare perturbaţie care conţine o componentă de ordin mare se comportă exponenţial. Dacă, pe de altă parte, am ales condiţia de criticitate (12.10 a) astfel ca B să fie egal cu π/x_1, atunci în seria

Scanned with OKEN Scanner

Fourier ar exista o componentă de ordin mai mic care ar crește exponențial cu timpul.

Atunci, la $n=1$, componenta staționară este

$$\Phi(x)=A_1 \cos \frac{\pi}{x_1} x=A_1 \cos Bx. \tag{12.16}$$

Dacă am fi tratat problema de mai sus a nivelării perturbațiilor pentru un reactor la care în timpul procesului de nivelare, respectiv la $t=0$, absorbția de neutroni a anulat producția de neutroni, astfel că $B^2<0$ și $B=i\varkappa$ a devenit imaginar, atunci ecuația (12.10) ia forma

$$\Phi(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n \frac{\pi}{x_1} x\right) \exp\left[-a\left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1^2}+\varkappa^2\right) t\right]. \tag{12.17}$$

Acum nu există componente staționare. Natural, cînd B este imaginar, ecuația (12.2) se referă mai degrabă la un sistem subcritic decît la unul critic. Ecuația (12.17) descrie, astfel, modificarea fluxului de neutroni într-un mediu absorbant finit.

Să revenim la seriile Fourier și să le generalizăm, notînd că pentru o origine a axelor de coordonate aleasă diferit, funcțiile $\Phi(x, 0)$ și $\Phi(x, t)$ pot fi exprimate ca funcții de sinus sau de cosinus. Expresia generală pentru funcția $\Phi(x, t)$ care satisface ecuația diferențială (12.3) și condiția inițială $\Phi(x, 0)$ este în mod corespunzător

$$\Phi(x, t)=\frac{1}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \cos\left(n \frac{\pi}{x_1} \xi\right) d\xi\right] \cos\left(n \frac{\pi}{x_1} x\right) \exp\left[-a\left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-B^2\right) t\right]+\frac{1}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{(2x_1)} \Phi(\xi, 0) \sin\left(n \frac{\pi}{x_1} \xi\right) d\xi\right] \sin\left(n \frac{\pi}{x_1} x\right) \exp\left[-a\left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1^2}-B^2\right) t\right]. \tag{12.18}$$

Seria Fourier poate fi scrisă mai convenabil cu ajutorul funcțiilor exponențiale periodice decît cu ajutorul funcțiilor trigonometrice. Soluția ecuației de difuzie ca o serie Fourier de astfel de funcții este

$$\Phi(x, t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \exp\left(in \frac{\pi}{x_1} x\right) \exp\left[-a\left(n^2 \frac{\pi^2}{x_1^2}-B^2\right) t\right], \tag{12.19}$$

C_n sînt constante care trebuie să fie determinate din condițiile inițiale.

Însumînd de la $-\infty$ la $+\infty$, obținem aici într-o sumă toate soluțiile ecuației (12.3), care trebuie scrise în două sume în ecuația (12.18). Combinînd

Scanned with OKEN Scanner

funcțiile exponențiale cu valori pozitive și negative ale lui n se poate obține din nou reprezentarea prin funcții trigonometrice.

Din ecuația (12.19), pentru $t=0$ avem:

$$\Phi(x, 0)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n \exp\left(in\frac{\pi}{x_1}x\right). \tag{12.20}$$

Înmulțind ambele părți ale egalității cu $\exp(-in\pi/x_1)$ și integrînd peste o perioadă se obține o condiție de ortogonalitate analogă ecuației (12.14):

$$\int_{(2x_1)} \exp\left(-in\frac{\pi}{x_1}\xi\right)\exp\left(i\nu\frac{\pi}{x_1}\xi\right)d\xi=\begin{cases}2x_1 & \text{pentru } \nu=n\\ 0 & \text{„ } \nu\neq n.\end{cases} \tag{12.21}$$

Ecuația care dă C_n este

$$C_n=\frac{1}{2x_1}\int_{(2x_1)}\Phi(\xi, 0)\exp\left(i\nu\frac{\pi}{x_1}\xi\right)d\xi. \tag{12.22}$$

Combinînd ecuațiile (12.20) și (12.22), obținem

$$\Phi(x, 0)=\frac{1}{2x_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{(2x_1)}\Phi(\xi, 0)\exp\left(in\frac{\pi}{x_1}(x-\xi)\right)d\xi \tag{12.23}$$

ar pentru fluxul dependent de timp $\Phi(x, t)$ din ecuațiile (12.21) și (12.22)

$$\Phi(x, t)=\frac{1}{2x_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{(2x_1)}\Phi(\xi, 0)\exp\left[-in\frac{\pi}{x_1}(x-\xi)-a\left(n^2\frac{\pi^2}{x_1^2}-B^2\right)t\right]d\xi. \tag{12.24}$$

Ecuația (12.24) este echivalentă cu ecuația (12.18). Seriile Fourier se utilizează întotdeauna pentru procesele de uniformizare cînd mediul în care este valabilă ecuația de difuzie (12.2) este mărginit, astfel că sînt date condiții de margine independente de timp și poziție.

Adeseori, se pot trata procese de uniformizare chiar dacă mediul a fost nemărginit. Acesta este cazul în care regiunea în care procesele de uniformizare au loc este atît de mică încît se pot neglija în orice moment efectele datorate fenomenului de uniformizare la marginile regiunii. În acest caz, se utilizează integrala Fourier în locul seriei Fourier. Integrala Fourier apare din seria Fourier dacă pasul dintre n și $n+1$ este făcut infinitezimal și în același timp perioada $2x_1$ este lăsată să crească la infinit.

Pe această cale, ecuația (12.23) devine

$$\Phi(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi, 0)\exp[ik(x-\xi)]dkd\xi \tag{12.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

și ecuația (12.24)

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, 0) \exp[ik(x-\xi) - a(k^2 - B^2)t] dk d\xi. \quad (12.26)$$

Numărul de undă k este valoarea limită a cantității $n\pi/x_1 \to k$ dacă n și x_1 devin infinit de mari.

Expresia integralei Fourier corespunzătoare seriei Fourier, exprimată în funcții trigonometrice, adică expresia ecuației (12.18), este

$$\Phi(x, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{k=0}^{\infty} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, 0) \cos k(x-\xi) \exp[-a(k^2 - B^2)t] dk d\xi. \quad (12.27)$$

Totuși, expresia funcțiilor exponențiale (12.26) este aproape întotdeauna preferabilă aceleia în funcții trigonometrice, deoarece este mult mai convenabil să se efectueze integrarea în planul complex decît în real.

Avantajul reprezentării proceselor de difuzie cu ajutorul seriilor sau integralelor Fourier este acela că, folosind această metodă, funcția $\Phi(x, t)$ satisface în orice caz ecuația de difuzie (12.3). Întreaga problemă a difuziei este redusă la însumarea sau integrarea unor funcții care conțin numai distribuția inițială a fluxului de neutroni $\Phi(x, 0)$.

Să înlocuim B^2 prin $-\varkappa^2$ în ecuația (12.26); integrala luată asupra lui k converge numai dacă mărimea părții reale a lui k este mai mare decît B. Atunci la integrarea asupra lui k de la $-\infty$ la $+\infty$, neapărat trecem printr-o regiune în care integrala Fourier este divergentă, situație care este, desigur, inadmisibilă și fără sens fizic: deoarece un B real în ecuația de difuzie (12.3) înseamnă, într-un reactor infinit, că producția de neutroni este mai mare decît absorbția. În acest caz, fluxul de neutroni ar crește exponențial. Atunci integrala Fourier este aplicabilă numai în cazul unui factor imaginar $B = i\varkappa$. Din ecuația (12.26), atunci

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, 0) \exp[ik(x-\xi) - a(k^2 + \varkappa^2)t] dk d\xi. \quad (12.28)$$

Această integrală converge în întreaga regiune de variație a lui k. Putem scoate factorul $\exp(-a\varkappa^2 t)$ în afara integralei și obținem

$$\Phi(x, t) = \exp(-a\varkappa^2 t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, 0) \exp[ik(x-\xi) - ak^2 t] \, dk d\xi. \right]; \quad (12.29)$$

Scanned with OKEN Scanner

Parantezele drepte mari conţin soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{12.30}$$

care este de acelaşi tip cu ecuaţia transportului de căldură şi diferă de ecuaţia (12.3) numai datorită absenţei termenului $B^2\Phi = -\varkappa^2\Phi$. Vedem atunci că se obţine soluţia ecuaţiei de difuzie (12.3) cu B imaginar prin înmulţirea soluţiei ecuaţiei (12.30) cu factorul de absorbţie $\exp(-a\varkappa^2 t)$.

Prin integrarea în raport cu k se obţine din ecuaţia (12.29)

$$\Phi(x, t) = \frac{\exp(-a\varkappa^2 t)}{(4\pi a t)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, 0)\ \exp\left[-\frac{(\varkappa-\xi)^2}{4at}\right] d\xi. \tag{12.31}$$

1. Funcţii Bessel

Mult mai importantă decît soluţia ecuaţiei diferenţiale în coordonate carteziene, tratată mai sus, este aceea în coordonate cilindrice. Să examinăm deci şi acest caz şi să selectăm în acelaşi timp unele proprietăţi ale funcţiilor cilindrice sau Bessel. Vom simplifica din nou problema, referindu-ne la un cilindru infinit lung. Tratarea unui cilindru de lungime finită presupune, ca şi mai înainte, o soluţie separabilă şi nu introduce nimic nou, nici o dificultate suplimentară.

Ecuaţia de difuzie (12.2) în coordonate cilindrice, folosind ecuaţia (11.62) în care omitem dependenţa de z, este

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + B^2\Phi = \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{12.32}$$

Notaţia coordonatelor este aceeaşi ca în ecuaţia (11.62). Cu o soluţie separabilă

$$\Phi(r, \varphi, t) = R(r)\cdot\Psi(\varphi)\cdot T(t) \tag{12.33}$$

obţinem

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{R}\frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} - B^2. \tag{12.34}$$

În partea stîngă există numai o funcţie de r şi φ, iar în partea dreaptă una numai de t. Atunci ambele părţi pot fi egalate cu o constantă $-\lambda^2$

$$\frac{dT}{dt} + a(\lambda^2 - B^2)T = 0 \tag{12.35}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{R}r\frac{dR}{dr}+\lambda^2r^2=-\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2}. \tag{12.36}$$

Scriem soluția primei ecuații (12.35) sub forma

$$T=\exp[-a(\lambda^2-B^2)t] \tag{12.37}$$

iar în ecuația (12.36) ambele părți sînt egalate cu o constantă n^2:

$$\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2}+n^2\psi=0 \tag{12.38}$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+(\lambda^2r^2-n^2)R=0. \tag{12.39}$$

O soluție a ecuației (12.38) este

$$\Psi=\exp(in\varphi). \tag{12.40}$$

Ecuația (12.39) este ecuația Bessel pe care o scriem sub formă normală

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-n^2)R=0 \tag{12.41}$$

cu ajutorul substituției $x=\lambda r$.

În calcul reactorului comportarea funcției Bessel este deosebit de interesantă în jurul originei. Vom începe, deci, cu dezvoltarea ei ca o serie de puteri în jurul originei.

Dacă substituim seria de puteri

$$R_n(x)=x^m\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,x^k, \tag{12.42}$$

atunci în ecuația (12.41), prin compararea coeficienților, avem

$$\begin{aligned}(m^2-n^2)a_0&=0\\((m+1)^2-n^2)a_1&=0\\&\vdots\\[(m+k)^2-n^2]a_k+a_{k-2}&=0.\end{aligned} \tag{12.43}$$

Atunci relația de recurență pentru coeficienți este

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{(m+k)^2-n^2}. \tag{12.44}$$

Dacă primul coeficient al seriei (12.42) nu se anulează, m trebuie să fie egal cu $\pm n$. a_0 este arbitrar și coeficienții care rămîn cu indici pari sînt, pentru $m=+n$,

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)} \tag{12.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi pentru $m=-n$

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(-2n+k)}, \tag{12.46}$$

Coeficienţii cu indici impari se anulează. Rezultă prin înlocuire în ecuaţia (12.42), cu $m=+n$, că

$$R_n(x)=a_0x^n\left[1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)}\cdot\cdot\cdot\right] \tag{12.47}$$

şi pentru $m=-n$

$$R_{-n}(x)=a_0x^{-n}\left[1+\frac{x^2}{2(2n-2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n-2)(2n-4)}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(2n-2)(2n-4)(2n-6)}\cdot\cdot\cdot\right] \tag{12.48}$$

(n nu este un întreg pozitiv)

Cele două soluţii (12.47) şi (12.48) sînt liniar independente, dar ele devin identice pentru $n=0$. Mai mult, seriile din ecuaţia (12.48) devin mai puţin potrivite pentru n întreg şi negativ. În aceste cazuri, numai una din cele două soluţii ale ecuaţiei (12.41) poate fi dezvoltată ca serie de puteri în jurul originei. Este suficient să ne limităm la seria (12.47) şi prin aceasta admitem, de asemenea, valori negative pentru n, cu excepţia că în acest caz trebuie să excludem valorile întregi negative ale lui n.

Este obişnuit să se normalizeze soluţiile ecuaţiei Bessel scriind $a_0=1/2^n n!$ în (12.47). Astfel se obţine aşa-numita funcţie Bessel de ordinul întîi

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(n+k)!} \tag{12.49}$$

(n nu este un întreg negativ)

sau, înlocuind factorialii cu funcţiile gamma corespunzătoare,

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!\Gamma(n+k+1)} \tag{12.50}$$

(n nu este un întreg negativ).

Am obţinut cele două soluţii ale ecuaţiei Bessel ca serii de puteri pentru n neîntreg, în timp ce pentru n întreg a existat numai o soluţie, cealaltă fiind exclusă. În consecinţă, trebuie să existe o altă soluţie neexprimabilă ca o serie de puteri. Acest grup de soluţii ale ecuaţiei

Scanned with OKEN Scanner

Bessel este reprezentat de funcţiile Bessel de ordinul doi. Să le citătm fără verificare, în primul rînd pentru n neîntreg

$$Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos nx-J_{-n}(x)}{\sin nx} \tag{12.51}$$

şi pentru n întreg şi pozitiv

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{2^{2k-n}\cdot k!}x^{2k-n}. \tag{12.52}$$

Funcţiile Bessel $Y(x)$ de ordinul doi sînt numite funcţii Neumann.

Deoarece pentru n neîntreg (12.47) şi (12.48) deja ne-au furnizat cele două soluţii liniar independente ale ecuaţiei Bessel, relaţia (12.51) trebuie să poată fi exprimată ca o combinaţie liniară a ecuaţiilor (12.47) şi (12.48). Relaţia (12.52) pentru n întreg este atunci obţinută din ecuaţia (12.51) trecînd de la valori neîntregi ale lui n la valori întregi.

Funcţiile Neumann, împreună cu funcţiile Bessel corespunzătoare de primul tip, formează soluţiile complete ale ecuaţiei lui Bessel

$$R_n(x)=Z_n(x)=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x) \tag{12.53}$$

în care C_1 şi C_2 sînt constante oarecare. Funcţiile $Z_n(x)$ sînt numite funcţii cilindrice.

Funcţiile Bessel de primul şi al doilea ordin sînt asemănătoare cu funcţiile trigonometrice şi, de fapt, funcţia $J_n(x)$ corespunde lui $\cos x$ şi funcţia $Y_n(x)$ lui $\sin x$. Aceasta sugerează deci să se definească pentru funcţiile cilindrice, funcţii care sînt legate de J_n şi Y_n în acelaşi mod cum funcţiile exponenţiale sînt legate de cele trigonometrice, adică

$$H_n^{(1)}(x)=J_n(x)+iY_n(x);\quad H_n^{(2)}(x)=J_n(x)-iY_n(x). \tag{12.54}$$

$H_n^{(1)}(x)$ şi $H_n^{(2)}(x)$ se numesc funcţii Hankel sau funcţii Bessel de ordinul trei. Ele sînt, de asemenea, soluţii liniar independente ale ecuaţiei lui Bessel. Dăm încă două relaţii care există între funcţiile Bessel şi permit o analogie cu funcţiile trigonometrice

$$J_n(x)=\frac{1}{2}\left(H_n^{(1)}(x)+H_n^{(2)}(x)\right) \tag{12.55}$$

$$Y_n(x)=\frac{1}{2i}\left(H_n^{(1)}(x)-H_n^{(2)}(x)\right). \tag{12.56}$$

Expresiile în funcţii Hankel, corespunzătoare ecuaţiei (12.51), sînt

$$H_n^{(1)}(x)=i\frac{\exp[-in\pi]J_n(x)-J_{-n}(x)}{\sin nx}\quad (n \text{ neîntreg}) \tag{12.57}$$

$$H_n^{(2)}(x)=-i\frac{\exp[in\pi]J_n(x)-J_{-n}(x)}{\sin nx}\quad (n \text{ neîntreg}). \tag{12.58}$$

Scanned with OKEN Scanner

Comportarea diferitelor funcţii cilindrice este schiţată în figurile 12.3—12.6.

Reprezentarea integrală a funcţiilor cilindrice este foarte folositoare pentru multe calcule; ea implică folosirea integralelor de contur în planul complex. De fapt, diferite tipuri de integrale de contur diferă în ceea ce priveşte drumul de integrare. Fig. 12.2 arată drumul de integrare care duce la diferite tipuri de funcţii Bessel. În ariile haşurate ale planului w, integrarea poate avea loc pe drumurile ce duc la infinit. Funcţiile Bessel de ordinul întîi sînt date de

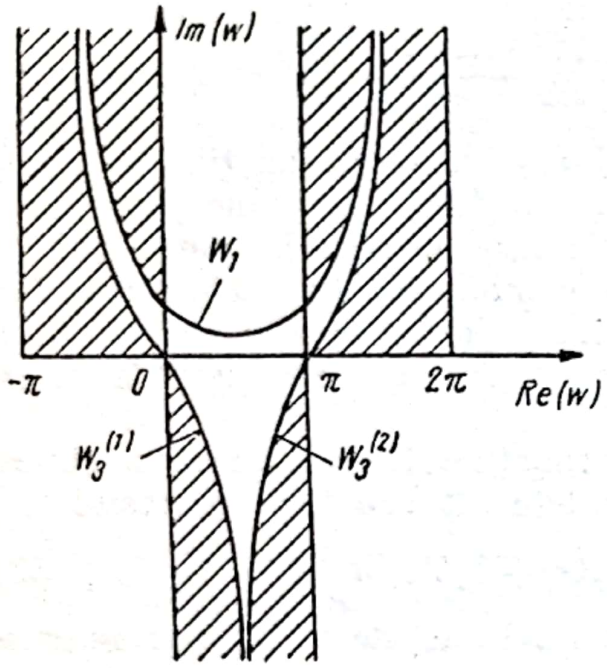


Fig. 12.2.

$$J_n(x)\frac{1}{2\pi}\int_{W_1}\exp\left\{i\left[x\cos w+n\left(w-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}dw. \qquad (12.59)$$

Integrarea în planul w este luată pedrumul W_1. În expresia (12.59), n poate fi întreg sau neîntreg, în timp ce

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[in(w-x\sin w)\right]dw \qquad (12.60)$$

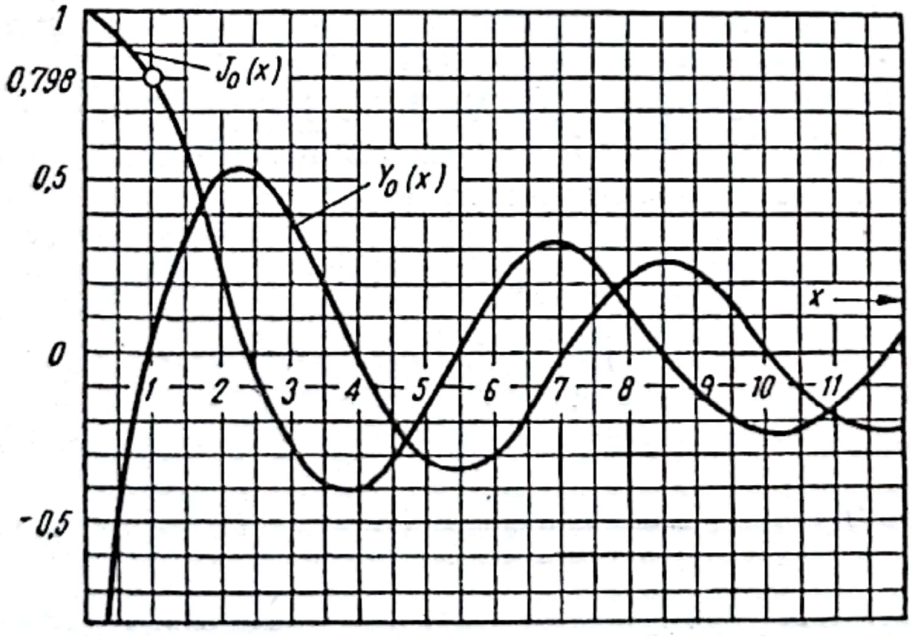


Fig. 12.3.

Scanned with OKEN Scanner

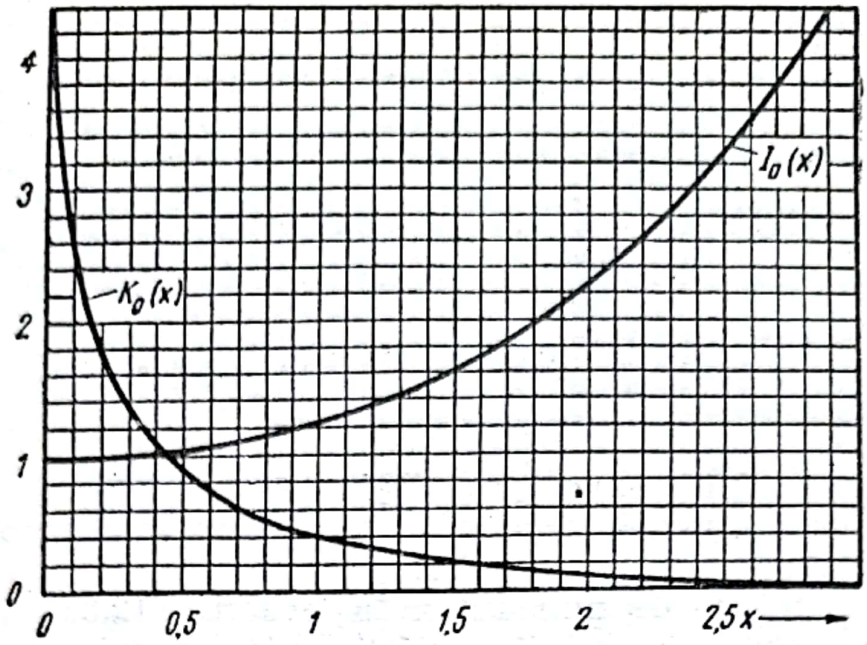


Fig. 12.4.

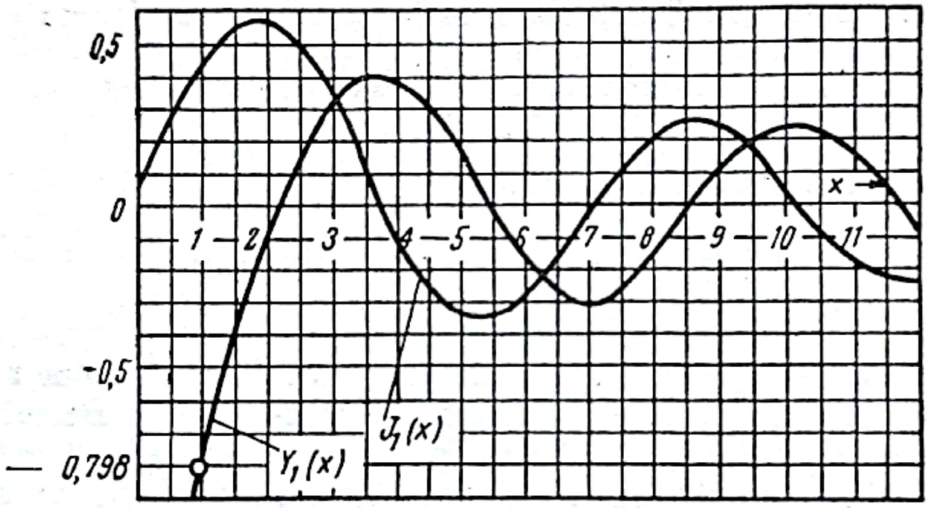


Fig. 12.5.

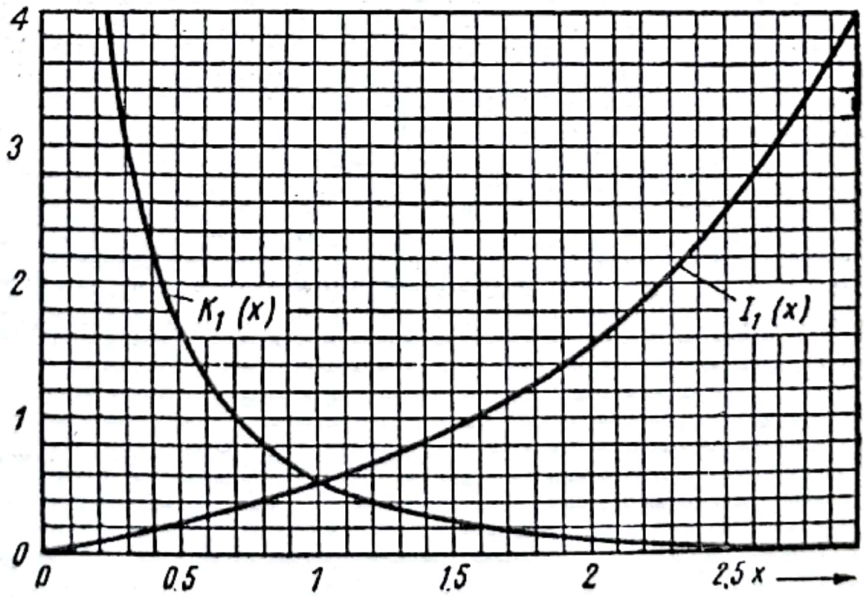


Fig. 12.6.

Scanned with OKEN Scanner

se aplică numai pentru n întreg. Drumul de integrare este partea reală dintre $-\pi$ şi π.

Funcţiile Hankel sînt

$$H_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{W_3^{(1)}} \exp\{i[x \cos w + n(w - \pi/2)]\} dw \qquad (12.61)$$

$$H_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{W_3^{(2)}} \exp\{i[x \cos w + n(w - \pi/2)]\} dw \qquad (12.62)$$

cu drumurile de integrare $W_3^{(1)}$ şi $W_3^{(2)}$ arătate în figura 12.2.

Să revenim din nou la ecuaţia (12.2), a cărei soluţie dorim s-o obţinem sub forma unei serii Fourier.

Nu ne-am folosit de numărul n în ecuaţia (12.38), dar trebuie, să-l stabilim astfel ca funcţia $\Psi(\varphi)$ să fie unic determinată pentru orice φ. Aceasta înseamnă că n trebuie să fie întreg sau egal cu zero. Putem deci scrie produsul $R(r)\Psi(\varphi)$ ca o serie Fourier, sub forma

$$R(r)\Psi(\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n(r) \exp(in\varphi) \qquad (12.63)$$

unde C_n este o funcţie de r, adică

$$C_n(r) = \frac{R(r)}{2\pi} \int_{(2\pi)} \Psi(\varphi) \exp(-in\varphi) d\varphi. \qquad (12.64)$$

Funcţia este soluţia ecuaţiei Bessel (12.39) pe care am rezolvat-o cu substituţia $x = \lambda r$. Dintre diferitele tipuri de funcţii Bessel pe care le-am discutat ca soluţii, să alegem pe aceea care îndeplineşte următoarele condiţii: la $r = 0$ are o valoare finită şi la $r = r_1$, pe suprafaţa reactorului, să se anuleze. Numai funcţia Bessel J_n satisface aceste condiţii. Funcţia J_n, totuşi, are un număr infinit de zerouri şi aceasta înseamnă că toate funcţiile J_n pentru care $J_n(\lambda_{nm} r_1)$ se anulează sînt soluţii posibile. Valorile λ_{nm} sînt determinate şi pot fi găsite în zerourile x_{mn} ale funcţiilor Bessel J_n

$$x_{nm} = \lambda_{nm} r_1 \quad \text{cu} \quad J_n(x_{nm}) = 0. \qquad (12.65)$$

Să exprimăm din nou funcţia $\Phi = R \cdot \Psi \cdot T$ ca o serie Fourier, folosind ecuaţiile (12.35) şi (12.38), dar astfel încît componentele individuale să nu fie funcţii trigonometrice, cum au fost mai înainte, ci funcţii Bessel $J_n(\lambda_{nm} r)$:

$$\Phi(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n(\lambda_{nm} r) \exp(in\varphi) \exp[-a(\lambda_{nm}^2 - B^2)t]. \qquad (12.66)$$

Scanned with OKEN Scanner

Această ecuație corespunde exact ecuației (12.10), cu excepția faptului că este necesară o sumare dublă, care rezultă din natura bidimensională a problemei. Mai mult, aici sumarea după m din ecuația (12.66), corespunde sumării după n din ecuația (12.10).

Ca și în cazul unidimensional, introducem condițiile inițiale la limită pentru a obține coeficienții A_{nm}, scriind pentru $t=0$ ecuația (12.66) sub forma

$$\Phi(r,\varphi,0)=R(r)\Psi(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n(\lambda_{nm}r)\exp[in\varphi]. \quad (12.67)$$

Comparația cu ecuația (12.63) arată că $C_n(r)$ trebuie să fie

$$C_n(r)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n(\lambda_{nm}r). \quad (12.68)$$

Ecuația (12.68) corespunde ecuației (12.12).

Pentru determinarea coeficientului A_{nm} putem aplica din nou relația de ortogonalitate ca și pentru funcțiile trigonometrice. Aici aceasta devine

$$\int_0^{r_1}J_n(\lambda_{nm}r)J_n(\lambda_{n\mu}r)r\,dr=\begin{cases}E_{nm} & \text{pentru } n=\mu\\ 0 & \text{pentru } n\neq\mu\end{cases} \quad (12.69)$$

în care E_{nm} sînt constante ce depind de n și m

$$E_{nm}=\frac{r_1^2}{2}\left[\frac{d}{dr}J_n(\lambda_{nm}r_1)\right]^2; \quad (12.70)$$

Cu $R\cdot\Psi=\Phi(r,\varphi,0)$ se obține, din ecuațiile (12.69), (12.68) și (12.64), ecuația care îl determină pe A_{nm}

$$A_{nm}=\frac{1}{2\pi E_{nm}}\int_0^{r_1}\int_{(2\pi)}\Phi(r,\varphi,0)J_n(\lambda_{nm}r)\exp[in\varphi-a(\lambda^2{}_{nm}-B^2)t]r\,dr\,d\varphi. \quad (12.71)$$

Expresia seriei Fourier pentru $\Phi(r,\varphi,t)$ a fost completată prin stabilirea coeficienților A_{nm} în funcție de distribuția inițială $\Phi(r,\varphi,0)$. Ecuația (12.71) corespunde deci din nou ecuației (12.17).

Ca și pentru funcțiile trigonometrice, se poate obține o integrală Fourier din reprezentarea funcției într-o serie Bessel-Fourier. O funcție $f(r)$ devine în reprezentarea integrală Fourier

$$f(r)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(\rho)J_n(\lambda r)J_n(\lambda\rho)\lambda\rho\,d\lambda\,d\rho \quad (12.72)$$

în care ρ este o variabilă de integrare în dimensiunea r.

Scanned with OKEN Scanner

Această integrală Fourier exprimată prin funcții Bessel corespunde aceleia din ecuația (12.25). Am omis aici numai dependența de unghi și de timp.

În final, să notăm cîteva formule frecvent utilizate, care implică funcțiile cilindrice.

Funcțiile Bessel cu argument real sînt notate de obicei cu $J_n(x)$. Dacă totuși argumentul este imaginar și egal cu ix, așa cum s-a întîmplat în discuția barelor de control, atunci $J_n(ix)$ poate deveni și ea complexă. Pentru a ajunge la o funcție reală, se înmulțește $J_n(ix)$ cu i^{-n} și se obține funcția Bessel modificată

$$I_n(x)=i^{-n}J_n(ix). \tag{12.73}$$

Pentru funcția Neumann există în literatură cîteva notații curente. În literatura germană se folosește aproape întotdeauna $N_n(x)$

$$N_n(x)=Y_n(x) \tag{12.74}$$

și uneori $K_n(x)$. De cele mai multe ori, ca și în această carte, litera K se folosește pentru funcția Bessel modificată de ordinul trei. Funcția $K_n(x)$ este introdusă pentru a obține o funcție reală pentru funcția Hankel cu argumente imaginare

$$K_n(x)=\frac{\pi}{2}\,i^{n+1}H_n^{(1)}(ix). \tag{12.75}$$

În cazul argumentelor imaginare, pentru ecuația Bessel

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-(x^2+n^2)R=0 \tag{12.76}$$

se aleg în general două soluții independente de forma

$$I_n(x)=i^{-n}J_n(ix) \text{ și } K_n(x)=\frac{\pi}{2}\,i^{n+1}H_n^{(1)}(ix). \tag{12.77}$$

Am menționat deja dezvoltarea în serie a funcției Bessel de primul ordin pentru n întreg în ecuația (12.49). În cele mai multe cazuri, în tehnologia reactorului ne interesează seriile pentru funcțiile Bessel cu $n=0$ și $n=1$. Să le prezentăm pe scurt din nou, aici

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2\,304}+\cdots \tag{12.78}$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{16}+\frac{x^5}{384}-\frac{x^7}{18\,432}+\cdots \tag{12.79}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2\,304} \cdots \tag{12.80}$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18\,432} \cdots \tag{12.81}$$

$$Y_0(x) = -0{,}6366 \ln \frac{1{,}1229}{x}\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} \cdots\right) + 0{,}6366\left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} \cdots\right) \tag{12.82}$$

$$Y_1(x) = -\frac{0{,}6366}{x} - 0{,}3183 \ln \frac{1{,}1229}{x}\left(x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{192} \cdots\right) -$$

$$-0{,}3183\left(\frac{x}{2} - \frac{5}{32}x^3 \cdots\right) \tag{12.83}$$

$$K_0(x) = \ln \frac{1{,}1229}{x}\left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} \cdots\right) + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{128} \cdots \tag{12.84}$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} - \ln \frac{1{,}1229}{x}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} \cdots\right) - \left(\frac{x}{4} + \frac{5x^3}{64} + \frac{5x^5}{1\,152} \cdots\right) \tag{12.85}$$

Separat de aceste dezvoltări în serie a funcţiilor Bessel în jurul originei, se foloseşte adesea forma asimptotică, adică comportarea lor pentru argumente x mari. În comportarea asimptotică a funcţiilor Bessel asemănarea cu funcţiile trigonometrice sau exponenţiale este clară. Pentru valori mari ale lui x avem

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1 - \frac{1}{16x^2}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8x}\right) \tag{12.86}$$

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1 + \frac{3}{16x^2}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8x}\right) \tag{12.87}$$

$$I_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2}\right)\exp x \tag{12.88}$$

$$I_1(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 - \frac{3}{8x} - \frac{15}{128x^2}\right)\exp x \tag{12.89}$$

$$Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1 - \frac{1}{16x^2}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8x}\right) \tag{12.90}$$

$$Y_1(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1 + \frac{3}{16x^2}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{8x}\right) \tag{12.91}$$

$$K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(1 - \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2}\right)\exp[-x] \tag{12.92}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(1+\frac{3}{8x}-\frac{15}{128x^2}\right)\exp[-x] \tag{12.93}$$

$$H_0^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1-\frac{1}{16x^2}\right)\exp\left[i\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8x}\right)\right] \tag{12.94}$$

$$H_0^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1-\frac{1}{16x^2}\right)\exp\left[-i\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8x}\right)\right] \tag{12.95}$$

$$H_1^{(1)} \approx -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1+\frac{3}{16x^2}\right)\exp\left[i\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{8x}\right)\right] \tag{12.96}$$

$$H_1^{(2)} \approx i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(1+\frac{3}{16x^2}\right)\exp\left[-i\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{8x}\right)\right], \tag{12.97}$$

$H^{(2)}(x)$ este funcţia complex conjugată a lui $H^{(1)}(x)$. Eroarea relativă a acestor expresii asimptotice este mai mică de 1% pentru $x \geqslant 4$.

Foarte convenabile pentru multe calcule sînt valorile aproximative ale funcţiilor Bessel exprimate sub formă de funcţii trigonometrice. Aceste formule se obţin direct din reprezentarea integrală a funcţiilor Bessel, prin aproximarea integralelor prin sume. De exemplu

$$J_0(x) \approx \frac{1}{4}\left(1+\cos x\ +2\ \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{12.98}$$

$$J_1(x) \approx \frac{1}{4}\left(\sin\ x+\sqrt{2}\ \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \tag{12.99}$$

Aceste formule sînt valabile în regiunea $0 \leqslant x \leqslant 3{,}5$ cu o precizie de 1%. Eroarea creşte repede cu creşterea argumentului şi se anulează pentru $x \to 0$.

Prin diferenţiere şi integrare, funcţiile Bessel trec în alte funcţii Bessel de acelaşi tip. În general, se aplică următoarele reguli:

$$\frac{dZ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x}Z_n + Z_{n-1} = \frac{n}{x}Z_n - Z_{n+1} = \frac{1}{2}(Z_{n-1} - Z_{n+1}) \tag{12.100}$$

$$\frac{d}{dx}[x^n Z_n(x)] = x^n Z_{n-1}(x) \tag{12.101}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} Z_n(x)] = -x^{-n} Z_{n+1}(x) \tag{12.102}$$

$$\int x^{n+1} Z_n(x)\,dx = x^{n+1} Z_{n+1}(x) \tag{12.103}$$

$$\int x^{-n+1} Z_n(x)\,dx = -x^{-n+1} Z_{n-1}(x) \tag{12.104}$$

Scanned with OKEN Scanner

și în special

$$\frac{dZ_0}{dx} = -Z_1. \qquad (12.105)$$

Figurile 12.3—12.6 arată funcțiile Bessel de ordinul zero și unu cu argument real. Aici se poate vedea, de asemenea, asemănarea cu funcțiile trigonometrice sau exponențiale.

Funcțiile J_n și Y_n sînt cvasiperiodice și corespund funcțiilor cos și sin, în timp ce I_n și K_n sînt aperiodice. Funcția I_n reproduce ch x și funcția K_n —funcția exponențială $\exp(-x)$.

2. Funcții sferice

Vom discuta aici numai pe scurt funcțiile sferice, datorită rolului lor minor în calculul reactorului în comparație cu funcțiile Bessel.

Funcțiile sferice pot fi deduse pe multe căi diferite. De exemplu, pe aceeași cale, cum s-a făcut pentru funcțiile Bessel, scriind ecuația de difuzie (12.2), conform ecuației (12.63), în coordonate sferice. Separînd variabilele $R(r)$ și $T(t)$, care nu ne interesează aici, ecuația diferențială pentru dependența de φ are forma

$$\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} + m^2\Psi = 0 \qquad (12.106)$$

și pentru dependența de θ a lui $\Theta(\theta)$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\sin\theta + \frac{d\Theta}{d\theta}\cos\theta + n(n+1)\Theta\sin\theta - \frac{m^2}{\sin\theta}\Theta = 0. \qquad (12.107)$$

n este o constantă, m este, ca și în ecuația 12.40 n, numărul de noduri în direcția azimutală φ; m trebuie să fie egal cu zero sau un număr întreg.

O soluție a ecuației (12.106) este

$$\Psi(\varphi) = \exp(im\varphi). \qquad (12.108)$$

Ecuația (12.107) pentru $m=0$ și cu substituțiile $\cos\theta = x$, $\Theta(\theta) = P(x)$, devine ecuația Legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2P(x)}{dx^2} - 2x\frac{dP(x)}{dx} + n(n+1)P(x) = 0. \qquad (12.109)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dezvoltăm o soluție a ecuației (12.109), ca și în cazul funcțiilor Bessel, sub forma unei serii de puteri

$$P(x)=a_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4\ldots\right]+$$

$$+a_1\left[x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5\ldots\right]. \quad (12.110)$$

Coeficienții acestei serii sînt din nou determinați prin comparație. a_0 și a_1 sînt presupuși constanți, astfel că ecuația (12.110) este, în general, soluția ecuației Legendre în regiunea de convergență a seriei, $-1<x<+1$. Pentru coeficienții rămași se aplică formula de recurență

$$a_k=-a_{k-2}\frac{(n-k+2)(n+k-1)}{k(k-1)}. \quad (12.111)$$

Seria (12.110) prezintă interes pentru noi doar pentru valori întregi pozitive ale lui n. Dacă n este par, atunci prima parte a seriei (12.110) se reduce la un polinom, iar pentru n impar, cea de-a doua. Aceste polinoame, care se normează apoi astfel încît pentru $x=1$, $P(x)=1$, sînt polinoamele Legendre

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\ P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,\ P_4(x)=$$

$$=\frac{7\cdot5}{4\cdot2}x^4-2\frac{5\cdot3}{4\cdot2}x^2+\frac{3\cdot1}{4\cdot2},\ \ldots,P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \quad (12.112)$$

Indicele lui P este în fiecare caz egal cu n. Se poate arăta ușor că polinoamele P_n în regiunea -1, $+1$ sînt ortogonale

$$\int_{-1}^{+1}P_\nu(x)P_n(x)dx=\begin{cases}\frac{2}{2n+1} & \text{pentru } n=\nu\\ 0 & \text{pentru } n\neq\nu,\end{cases} \quad (12.113)$$

În afară de polinoamele Legendre, ne mai interesează și așa-numitele funcții Legendre. Ele sînt soluții ale ecuației (12.107), pentru $m\neq0$.

Prin substituțiile $\Theta=P^{(m)}(\theta)=\sin^m(\theta)p^{(m)}(x)$ și $x=\cos\theta$ în ecuația (12.107), obținem

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}p^{(m)}(x)-2(m+1)\,x\frac{d}{dx}p^{(m)}(x)+[n(n+1)-m(m+$$

$$+1)]p^{(m)}(x)=0. \quad (12.114)$$

Pentru $m=0$ această ecuație se reduce la ecuația Legendre (12.109). Astfel

$$p^{(0)}(x)=P(x). \quad (12.115)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă se diferenţiază ecuaţia (12.114) în raport cu x, se obţine

$$(1-x^2)\frac{d^3}{dx^3}p^{(m)}(x)-2(m+2)x\frac{d^2}{dx^2}p^{(m)}(x)+[n(n+1)-$$

$$-(m+1)(m+2)]\frac{d}{dx}p^{(m)}(x)=0 \qquad (12.116)$$

care este o ecuaţie de acelaşi tip cu ecuaţia (12.114), cu excepţia faptului că acum $(d/dx)\,p^m(x)$ înlocuieşte $p^{(m)}(x)$ şi $m+1$ înlocuieşte m. Deoarece, $p^{(m)}(x)$ este soluţia ecuaţiei (12.114), rezultă că $(d/dx)p^m(x)$ trebuie să fie o soluţie a ecuaţiei (12.114) cu m crescut cu o unitate. Atunci

$$p^{(m+1)}(x)=\frac{d}{dx}p^{(m)}(x)=\frac{d^2}{dx^2}p^{(m-1)}(x)\ldots=\frac{d^{(m+1)}}{dx^{(m+1)}}p^{(0)}(x) \qquad (12.117)$$

şi din ecuaţia (12.115) şi definiţia funcţiei $p^m(x)$ rezultă

$$p^{(m)}(x)=\frac{P_n^{(m)}(\theta)}{\sin^m\theta}=\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \qquad (12.118)$$

sau

$$P_n^{(m)}(\theta)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x). \qquad (12.119)$$

$P_n^m(\theta)$ sînt funcţiile Legendre asociate. Conform ecuaţiei (12.119), ele derivă din funcţiile Legendre. Deoarece funcţiile Legendre de gradul n provin din funcţia x^2-1, conform ultimei ecuaţii din (12.112) se pot găsi, de asemenea, toate funcţiile Legendre asociate, din această funcţie:

$$P_n^{(m)}(\theta)=\frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n \qquad (12.120)$$

Funcţiile Legendre sînt utile la studiul ciocnirilor dintre neutroni şi nucleele atomice. Mai mult, în baza proprietăţilor lor de ortogonalitate, sînt curent folosite pentru a exprima prin aproximaţie alte funcţii. Vom reveni asupra acestei ultime posibilităţi în capitolul următor.

Dacă se doreşte să se facă calcule în teoria difuziei macroscopice în coordonate sferice, atunci se poate proceda exact cum s-a făcut în cazul funcţiilor Bessel. Nu vom repeta aceasta aici, ci vom menţiona numai, seria Fourier ce apare din ecuaţia (12.113). Pentru o funcţie $f(x)$ aceasta este

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(\xi)P_n(\xi)P_n(x)d\xi. \qquad (12.121)$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul XIII

OPERATORI ŞI MATRICE

Din ceea ce am spus mai înainte despre operatori şi matrice putem presupune o asemănare formală simplă. Aplicarea unui operator, ca şi aceea a unei matrice, are ca efect o transformare a cantităţii matematice căreia i se aplică. În primul caz, de exemplu, o funcţie $\Phi(x)$ este transformată cu ajutorul unui operator unidimensional ∇^2 într-o altă funcţie $\Psi(x)$

$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\Psi(x). \tag{13.1}$$

În al doilea caz, prin transformarea cu ajutorul matricei D, un vector $\vec{a}$ (vezi ecuaţia (11.15)) este transformat în alt vector $\vec{b}$

$$Da=b. \tag{13.2}$$

Aşa cum ştim din teoria difuziei, transformarea care schimbă o funcţie în alta de acelaşi tip, $\Psi=-B^2\Phi$ are o importanţă particulară

$$\nabla^2\Phi+B^2\Phi=0. \tag{13.3}$$

Ecuaţia

$$(D-E\lambda)a=0 \tag{13.4}$$

are o semnificaţie similară în calculul cu matrice. D este o matrice care, în acest caz, nu este otrogonală. În general, ea va avea anumite proprietăţi de simetrie. Aici λ, ca şi $-B^2$, este o constantă.

Pentru a transfera analogia dintre operatori şi matrice în aceea dintre funcţii şi vectori, comparăm unele proprietăţi ale funcţiilor $\exp(i2\pi nx)$, care au fost discutate în legătură cu seriile Fourier, cu proprietăţile corespunzătoare ale vectorilor.

În ecuaţia (11.5) am descompus un vector în componente

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+\ldots+a_n\vec{e}_n. \tag{13.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

O descompunere similară a funcției $\Phi(x)$ a fost făcută în ecuația (12.20), sub forma

$$\Phi(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i2\pi\nu x)\,. \tag{13.6}$$

Constantele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ corespund aici constantelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și funcțiile $\exp(i2\pi\nu x)$ vectorilor unitari $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Desigur, pentru a completa analogia, ar trebui să facem și spațiul vectorial cu un număr infinit de dimensiuni.

Am găsit componenta a_μ a vectorului $\vec{a}$ în ecuația (11.7) înmulțind vectorul $\vec{a}$ cu vectorul unitar $\vec{e}_\mu$.

În acest produs,

$$(\vec{a},\vec{e}_\mu)=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\vec{e}_\nu,\vec{e}_\mu); \tag{13.7}$$

pe baza ecuației de ortogonalitate (11.10), în partea dreaptă rămîne numai

$$a_\mu(\vec{e}_\mu,\ \vec{e}_\mu)=a_\mu. \tag{13.8}$$

Pe aceeași cale am găsit din ecuația (12.22) constanta c_μ

$$c_\mu=\int_{(1)}\Phi(\xi)\exp(-i2\pi\mu\xi)d\xi \tag{13.9}$$

cu

$$\int_{(1)}\exp(i2\pi\nu\xi)\exp(-i2\pi\mu\xi)d\xi=0 \quad \text{pentru} \quad \nu\neq\mu. \tag{13.10}$$

Această ecuație corespunde ecuației (13.7), dacă funcția Φ corespunde vectorului $\vec{a}$ și integrarea asupra primei perioade, cu formarea produsului scalar. Totuși, în această integrală, funcția $\exp(i2\pi\mu\,\xi)$, care este analogă vectorului unitar $\vec{e}_\mu$, nu apare, ci numai complexa ei conjugată $\exp(-i2\pi\mu\,\xi)$.

Corespunzător ecuației (11.8)

$$\vec{a}=\sum_{\nu=1}^{n}(\vec{a},\vec{e}_\nu)\vec{e}_\nu \tag{13.11}$$

avem în final (12.23)

$$\Phi(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{(1)}\Phi(\xi)\exp[i2\pi\nu(x-\xi)]d\xi \tag{13.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, se poate vedea că există o analogie extensivă între vectori şi funcţii. Pentru aceasta au şi fost adoptate aceleaşi notaţii ca şi în analiza vectorială. Aici se spune, de exemplu, că funcţiile $\exp(i2\pi\nu x)$ aparţin aşa-numitului spaţiu Hilbert; ele sînt reciproc ortogonale, conform ecuaţiei (13.10) etc. Acelaşi rol important pe care îl joacă vectorii ortogonali în geometria în spaţiu, este jucat în spaţiul Hilbert de funcţiile ortogonale.

Avantajul principal al funcţiilor ortogonale este dat de însăşi condiţia de ortogonalitate (13.10). Calculul cu funcţii ortogonale oferă un avantaj în plus dacă se doreşte să se aproximeze o funcţie complicată printr-un număr mare de funcţii simple, de exemplu printr-un polinom de gradul n. Funcţia complicată poate fi deci dată sub orice formă, de exemplu, chiar implicit printr-o ecuaţie diferenţială. În general, funcţia este aproximată cu ajutorul polinoamelor, prin minimalizarea integralei asupra pătratului diferenţei dintre funcţie şi polinoame. Acesta este cunoscutul principiu gaussian al minimelor pătrate[1]. Se determină coeficienţii polinomului prin acest proces care este uneori foarte laborios. Adesea rezultă că polinomul de gradul n nu furnizează precizia dorită şi trebuie ales un polinom de gradul $(n+1)$ sau mai mare. Aceasta înseamnă, în general, că trebuie să se înceapă procesul din nou, deoarece coeficienţii deja stabiliţi pentru polinomul de gradul n trebuie toţi schimbaţi.

Problema acestui tip de aproximaţii apare frecvent în calculul reactorului, de exemplu dacă distribuţia fluxului de neutroni în zona activă este distorsionată de efectul de temperatură sau prin consumul neuniform de combustibil.

Să trecem acum la operatori şi matrice.

Fie un operator care poate fi de orice tip, de exemplu, operatorul ∇ sau ∇^2, sau chiar un număr oarecare, notat cu L. Fie funcţia Ψ formată ca rezultat al aplicării operatorului $\hat{L}$ asupra funcţiei Φ

$$\hat{L}\Phi(x)=\Psi(x) \tag{13.13}$$

Funcţiile Φ şi Ψ pot fi reprezentate cu ajutorul funcţiilor ortogonale ψ_ν, sub forma

$$\Psi=\sum_\nu b_\nu\psi_\nu \tag{13.14}$$

$$\Phi=\sum_\nu c_\nu\psi_\nu \tag{13.15}$$

[1]) Dacă se compară această problemă de cea mai bună aproximaţie cu problema corespunzătoare din geometrie, atunci analogia dintre vectorii ortogonali şi funcţiile ortogonale devine şi mai clară.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru condiţia de ortogonalitate, conform ecuaţiei (13.10)

$$\int \psi_\nu(x)\psi_\mu^*(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{pentru } \nu = \mu. \end{cases} \qquad (13.16)$$

Asteriscul înseamnă aici funcţia complex conjugată a funcţiei respective. Domeniul de integrare pentru care se aplică ecuaţia de ortogonalitate nu este specificat sub semnul integrală, deoarece el poate fi diferit, conform tipului de sistem ortogonal folosit. În general am simplificat scrierea considerînd numai coordonata x. Prin adăugarea celorlalte coordonate nu apar dificultăţi suplimentare.

Scopul nostru este acum de a descrie transformarea funcţiei $\Phi(x)$, cu ajutorul operatorului $\hat{L}$, ca o transformare a componentelor b_ν în componentele c_ν. Pentru aceasta, aplicăm operatorul $\hat{L}$ ecuaţiei (13.15) şi apoi înlocuim ecuaţiile (13.13) şi (13.15)

$$\hat{L}\Phi = \Psi = \sum_{(\nu)} c_\nu \hat{L}\psi_\nu = \sum_{(\nu)} b_\nu \psi_\nu. \qquad (13.17)$$

Dacă înmulţim această ecuaţie cu ψ_μ^* şi o integrăm pe domeniul de ortogonalitate, atunci în baza ortogonalităţii lui ψ_ν (vezi ecuaţia (13.16)), obţinem

$$b_\mu = \sum_{(\nu)} c_\nu \int \psi_\mu^* \hat{L}\,\psi_\nu dx. \qquad (13.18)$$

Integrala din ecuaţia (13.18) este o constantă care depinde în fiecare caz de μ şi ν, şi anume

$$\int \psi_\mu^* \hat{L}\psi_\nu\,dx = L_{\mu\nu} \qquad (13.19)$$

astfel că putem scrie ecuaţia (13.18) sub forma

$$b_\mu = \sum_\nu L_{\mu\nu} c_\nu\,. \qquad (13.20)$$

O comparare cu ecuaţia (13.18) arată că $L_{\mu\nu}$, trebuie considerate elemente ale unei matrice L, care transformă un vector

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} \qquad (13.21)$$

Scanned with OKEN Scanner

într-un alt vector

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{13.22}$$

Este adevărat că, în general, indicierea componentelor vectorului se face de la $-\infty$ la $+\infty$, dar aici, în calculul reactorului, avem de-a face în cele mai multe cazuri numai cu un număr finit de componente, care se pot atunci numerota de la 1 la n. Atunci, ecuaţia (13.20) scrisă sub formă matriceală este

$$b=L\,c. \tag{13.23}$$

Astfel, analogia dintre operatori şi matrice, pe care am recunoscut-o numai formal, a fost acum, de fapt, demonstrată. Transformarea unei funcţii Φ în altă funcţie Ψ, cu ajutorul operatorului $\hat{L}$ înseamnă acelaşi lucru ca şi transformarea cu ajutorul unei matrice L a componentelor c_ν ale lui Φ în componentele b_ν ale lui Ψ. Ecuaţia de legătură între aceste două transformări este (13.19).

Să considerăm acum cea mai simplă problemă a aşa-numitelor valori proprii. Există ecuaţii diferenţiale de tipul ecuaţiei de difuzie, adică a ecuaţiei (13.3), în care transformarea unei funcţii cu ajutorul unui operator $\hat{L}$ conduce la o altă funcţie care este proporţională cu funcţia iniţială, de exemplu

$$\hat{L}\varphi_\nu=\lambda_\nu\varphi_\nu. \tag{13.24}$$

Am tratat o problemă de valori proprii de acest tip în capitolul 12, aşa că dacă vom considera soluţia dată acolo, în ecuaţia (12.19)

$$\Phi(x,t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu \exp(i2\pi\nu x)\exp[-a(\nu^2 4\pi^2-B^2)t] \tag{13.25}$$

pentru ecuaţia de difuzie (12.3)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+B^2\Phi=\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{13.26}$$

putem stabili nu numai că suma (13.25) satisface ecuaţia (13.26), ci şi că fiecare termen al ei are această proprietate. Putem pune acum

$$\exp(i2\pi\nu x)=\varphi_\nu \tag{13.27}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi obţinem prin substituirea termenului de rang ν în ecuaţia (13.26),

$$\frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x^2} + B^2 \varphi_\nu = (B^2 - 4\pi^2 \nu^2) \varphi_\nu \tag{13.28}$$

care este ecuaţia (13.24) dacă punem

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B^2 \text{ şi } \lambda_\nu = (B^2 - 4\pi^2 \nu^2). \tag{13.29}$$

În acest exemplu, funcţiile de tipul (13.27) au exponenţi armonici şi sînt ortogonale, aşa cum ştim din ecuaţia (13.10). Totuşi, aceasta nu se întîmplă întotdeauna. De exemplu, puterile funcţiilor trigonometrice corespunzătoare funcţiilor $\exp(i2\pi\nu x)$ nu sînt armonice, dacă avem de-a face cu un reactor cu reflector sau tratînd problemele de transfer de căldură în care sînt prezentate cîteva straturi cu proprietăţi diferite ale transferului de căldură. Atunci funcţiile φ_ν nu formează un sistem ortogonal. Deocamdată, însă, să presupunem ortogonalitatea aşa-numitelor funcţii proprii φ_ν ale ecuaţiei (13.24) şi să deducem din aceasta o importantă proprietate a operatorului $\hat{L}$.

Pentru aceasta, să formăm cantităţile complex conjugate ale unei alte ecuaţii cu valori proprii (aşa cum se vede mai sus, separat de ecuaţia (13.24), există cîteva, în general un număr infinit, de ecuaţii cu valori proprii ale aceleiaşi probleme de valori proprii):

$$\hat{L}^* \varphi_\mu^* = \lambda_\mu \varphi_\mu^*. \tag{13.30}$$

Asteriscul marchează din nou mărimea complex conjugată. Am ales valorile proprii λ_μ reale. Dacă înmulţim acum ecuaţia (13.24) cu φ_μ^* şi ecuaţia (13.30) cu φ_ν, le scădem una din alta şi apoi integrăm în domeniul de ortogonalitate al lui φ_ν, obţinem

$$\int \varphi_\mu^* \hat{L} \varphi_\nu \, dx - \int \varphi_\nu \hat{L}^* \varphi_\mu^* \, dx = (\lambda_\nu - \lambda_\mu) \int \varphi_\mu^* \varphi_\nu dx = 0.$$

Partea dreaptă dispare pentru $\mu \neq \nu$, în baza ortogonalităţii funcţiilor proprii φ, şi pentru $\nu = \mu$, datorită faptului că am ales valorile proprii reale. Atunci, în fiecare caz

$$\int \varphi_\mu^* \hat{L} \varphi_\nu \, dx = \int \varphi_\nu \hat{L}^* \varphi_\mu^* dx. \tag{13.31}$$

Un operator $\hat{L}$ care satisface ecuaţia (13.31) este numit autoadjunct sau operator hermitic.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietatea de hermiticitate a unui operator $\hat{L}$ este, în cazul în care φ este funcţie proprie a lui $\hat{L}$, cuplată cu ortogonalitatea lui φ[1]. Dacă, totuşi, o problemă de valori proprii este formulată astfel încît funcţiile proprii φ_ν nu sînt ortogonale, atunci este convenabil să se trateze problema cu ajutorul funcţiilor ortogonale.

Pentru acest scop, construim un sistem de funcţii $\varphi_\nu^\dagger$ care să aibă, în primul rînd, proprietatea de a fi ortogonal pe sistemul de funcţii proprii φ_ν, astfel încît

$$\int \varphi_\nu^* \varphi_\mu^\dagger = 0 \text{ pentru } \mu \neq \nu \tag{13.32}$$

şi, în al doilea rînd, satisface un sistem de ecuaţii proprii

$$\hat{L}^\dagger \varphi_\mu^\dagger = \lambda_\mu^* \varphi_\mu^\dagger . \tag{13.33}$$

Aici admitem că valorile proprii λ_μ ale ecuaţiei (13.24) să fie complexe (desigur, nu este întotdeauna necesar). Alegem valorile proprii ale ecuaţiei (13.33) complex conjugate faţă de acelea ale ecuaţiei (13.24). Prin aceleaşi operaţii ca şi mai înainte obţinem acum din ecuaţiile (13.24) şi (13.33)

$$\int \varphi_\mu^{\dagger *} \hat{L} \varphi_\nu \, dx - \int \varphi_\nu \hat{L}^{\dagger *} \varphi_\mu^{\dagger *} dx = (\lambda_\nu - \lambda_\mu) \int \varphi_\mu^{\dagger *} \varphi_\nu \, dx. \tag{13.34}$$

Partea dreaptă se anulează din nou pentru $\mu \neq \nu$, în baza condiţiilor de ortogonalitate (ecuaţia (13.32) şi pentru $\mu = \nu$, deoarece am ales valorile proprii ale ecuaţiei (13.33) complex conjugate faţă de acelea ale ecuaţiei (13.24).

Atunci, avem din nou în fiecare caz,

$$\int \varphi_\mu^{\dagger *} \hat{L} \varphi_\nu dx = \int \varphi_\nu \hat{L}^{\dagger *} \varphi_\mu^{\dagger *} dx. \tag{13.35}$$

Desigur, această ecuaţie trece în ecuaţia (13.31) dacă $\varphi_\nu^\dagger$ corespunde lui φ_ν, adică dacă sistemul φ_ν însuşi formează un sistem ortogonal Atunci operatorul $\hat{L} = \hat{L}^\dagger$ va fi autoadjunct. Dacă totuşi acest lucru nu este adevărat, atunci $\hat{L}^\dagger$ este aşa-numitul operator adjunct al lui $\hat{L}$.

Să trecem acum de la operatori la matrice.

---

[1]) Aceasta se aplică numai dacă funcţiile sînt funcţii proprii ale operatorului $\hat{L}$. Proprietatea de hermiticitate a unui operator este definită de ecuaţia (13.32), cînd φ_2 nu sînt funcţii proprii, ci funcţii arbitrare ce satisfac anumite condiţii. De exemplu, ele trebuie să fie integrabile, ele însele sau derivatele lor trebuie să se anuleze la marginea regiunii de integrare etc. Atunci, de exemplu, aşa cum se poate vedea din formula lui Green, operatorul ∇^2 este un operator hermitic, operatorul ∇ nu este, dar operatorul $i\nabla$ este de asemenea un operator hermitic.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm în primul rînd că în metoda matriceală de exprimare, problema de valori proprii (13.24), corespunzînd ecuației (13.23), este

$$Lc=c\lambda, \tag{13.36}$$

iar dacă punem $\Psi=\lambda\Phi$ în ecuațiile (13.13) și (13.15), atunci comparația cu ecuația (13.14) arată că $b_\nu=\lambda c_\nu$, adică $\vec{b}=\lambda\vec{c}$. Ecuația (13.36) rezultă atunci din ecuația (13.23).

Nu am dat indici lui λ în ecuația (13.36), datorită faptului că această ecuație este valabilă pentru toate valorile λ_ν; dacă scriem ecuația (13.36) sub forma

$$(L-\lambda E)c=0 \tag{13.37}$$

atunci acest sistem omogen de ecuații este rezolvabil numai dacă determinantul matricei

$$|L-\lambda E| \tag{13.38}$$

se anulează. E este matricea unitate. Acest determinant poate fi scris sub formă de polinom

$$\lambda^n-[L_{11}+L_{22}\ldots+L_{nn}]\lambda^{n-1}+\left[\begin{vmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}L_{22} & L_{23}\\ L_{32} & L_{33}\end{vmatrix}\ldots\right]\lambda^{n-2}+\ldots$$

$$+(-1)^n|L|=0 \tag{13.39}$$

cu

$$|L|=\begin{vmatrix}L_{11} & L_{12}\ldots L_{1n}\\ L_{21} & \\ \vdots & \\ \cdot & \\ L_{n1}\ldots\ldots L_{nn}\end{vmatrix} \tag{13.40}$$

Aici am presupus că ne așteptăm la n funcții proprii. Ecuația polinomială (13.39) are de asemenea n soluții. Pentru fiecare din aceste n valori proprii λ_ν, ecuația (13.37) este rezolvabilă și cele n soluții corespund funcțiilor proprii φ_ν ale ecuației (13.24). Soluția c_ν aparținînd valorii proprii λ_ν a ecuației (13.37), este numită vector propriu. Atunci, pentru cele n valori proprii λ_ν, există de asemenea un număr de n vectori proprii c_ν diferiți.

Astfel, am transpus complet problema de valori proprii scrisă în ecuația (13.24) cu ajutorul funcțiilor și operatorilor, într-o exprimare prin metode matriceale. Matricea L corespunde operatorului $\hat{L}$, cele

Scanned with OKEN Scanner

n valori proprii λ_ν corespund între ele, iar vectorii proprii c_ν, corespund funcţiilor proprii φ_ν.

Dacă se aranjează problema astfel ca funcţiile proprii φ_ν să coincidă cu ecuaţia (13.15), atunci matricea devine simplă; ea constă atunci numai din elemente diagonale, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Vectorii proprii c_ν conţin în fiecare caz numai o componentă. Acest caz special este denumit reprezentare faţă de axele principale.

Putem, de asemenea, transfera uşor proprietăţile operatorilor şi funcţiilor proprii în proprietăţi corespunzătoare ale matricelor şi valorilor proprii. De exemplu, putem construi o matrice $L^\dagger$ adjunctă a matricei L etc.

Să începem prin a arăta că vectorii proprii c_ν sînt reciproc perpendiculari, dacă funcţiile proprii corespunzătoare sînt ortogonale. Aceasta rezultă direct din ecuaţia (13.15).

Dacă φ_p şi φ_m sînt două funcţii ortogonale

$$\varphi_p = \Sigma c_{p\nu}\psi_\nu \quad \text{şi} \quad \varphi_m = \Sigma c_{m\nu}\psi_\nu \tag{13.41}$$

atunci, deoarece funcţiile φ_ν sînt de asemenea ortogonale,

$$\int \varphi_p^* \varphi_m \, dx = 0 = \int \left(\sum_\nu c_{p\nu}^* \psi_\nu^*\right)\left(\sum_\nu c_{m\nu}\psi_\nu\right) dx = c_{p1}^* c_{m1} + c_{p2}^* c_{m2} \ldots + c_{pn}^* c_{mn} \tag{13.42}$$

sau scrise într-o formă matriceală

$$c_p^{*\prime} c_m = 0. \tag{13.43}$$

Aceasta este condiţia de ortogonalitate, ecuaţia (11.12), pentru vectori, cu deosebirea că aici vectorii au componente complexe (apostroful caracterizează matricea transpusă).

Corespunzător, în cazul unui operator hermitic $\hat{L}$, vectorii proprii ai matricei L sînt ortogonali. Atunci, matricea L este, de asemenea, numită hermitică. Proprietatea unei matrice hermitice rezultă, împreună cu ecuaţia (13.19), din ecuaţia de difuzie (13.31), pentru un operator hermitic. Pentru aceasta, dacă

$$L_{\nu\mu} = \int \psi_\mu L \psi_\nu^* dx \tag{13.44}$$

atunci, dacă indicii μ şi ν caracterizînd coloanele şi liniile matricei sînt schimbaţi între ei şi se formează mărimea complex conjugată, obţinem

$$L_{\nu\mu}^* = \int \psi_\nu L^* \psi_\mu^* dx. \tag{13.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

și conform ecuației (13.31),

$$\int \psi_\nu L^* \psi_\mu^* dx = \int \psi_\mu^* L \psi_\nu dx \qquad (13.46)$$

astfel că pentru matricea hermitică avem

$$L_{\mu\nu}^* = L_{\nu\mu},$$

adică

$$L^{*\prime} = L.$$

Prin formarea matricei complex conjugate și interschimbarea coloanelor cu liniile, matricea hermitică trece în ea însăși.

Ne propunem, cu ajutorul vectorilor proprii, să arătăm de asemenea modul de formare a matricei adjuncte $L^\dagger$, pentru cazul funcțiilor și vectorilor proprii neortogonali.

Să începem cu ecuația (13.36), pe care s-o scriem din nou pentru vectorul propriu c_ν :

$$L\, c_\nu = \lambda_\nu \vec{c}_\nu . \qquad (13.47)$$

Alegem din nou un sistem $c_\mu^{*\dagger}$ ortogonal vectorilor c_ν, care satisfac ecuațiile cu valori proprii

$$L^\dagger c_\mu^\dagger = \lambda_\mu^* c_\mu^\dagger \qquad (13.48)$$

ale matricei $L^\dagger$. Formăm ecuația complex conjugată (față de ecuația (13.48)), apoi înmulțim ecuația (13.47) la stînga cu $c_\mu^{\dagger *\prime}$, și ecuația (13.48) cu c_ν' și le scădem una din alta

$$c_\mu^{\dagger *\prime} L \vec{c}_\nu - c_\nu' L^{\dagger *} c_\mu^{\dagger *} = (\lambda_\nu - \lambda_\mu)\, c^{\dagger *\prime} c_\nu = 0. \qquad (13.49)$$

c' este aici, matricea transpusă a lui c. Ecuația (13.49) se aplică pentru toți μ și ν. Condiția ca matricele L și $L^\dagger$ să fie adjuncte este dată de

$$c^{\dagger *\prime} L\, c_\nu = c_\nu' L^{\dagger *} c_\mu^{\dagger *}. \qquad (13.50)$$

Ecuația (13.50) corespunde ecuației (13.35).

Calculul vectorilor $\vec{c}_\nu^\dagger$, adjuncți lui c_ν, este făcut prin intermediul matricei $L^{\dagger *}$. Trebuie deci să arătăm cum se obține matricea $L^{\dagger *}$ din matricea L.

Scanned with OKEN Scanner

Produsul $c_\mu^{\dagger *\prime} L c_\nu$ este o matrice care constă dintr-un singur element. Transpusa unui element este egală cu el însuși. Atunci

$$c_\mu^{\dagger *\prime} L c_\nu = (c_\mu^{\dagger *\prime} L c_\nu)' = c_\nu' L' c^{\dagger *} \tag{13.51}$$

și deci din ecuațiile (13.50) și (13.51) rezultă că

$$c_\nu'(L^{\dagger *} - L') c_\nu^{\dagger *} = 0. \tag{13.52}$$

În cazul general, această ecuație este satisfăcută dacă

$$L^\dagger = L^{*\prime} \tag{13.53}$$

Corespunzător, obținem matricea $L^\dagger$, adjunctă față de L, luînd valorile complex conjugate ale elementelor lui L și apoi interschimbînd liniile cu coloanele.

Vectorii proprii $c_\nu^{\dagger *}$ se obțin rezolvînd sistemele omogene de ecuații (13.48).

În capitolul precedent și în special în acesta am accentuat analogia dintre vectori și funcții și între matrice și operatori, deoarece credem că tratarea comună înlesnește înțelegerea. Reprezentarea noastră poate da imaginea că operațiile în calculul cu matrice, arătat în acest capitol, joacă un rol numai împreună cu operatorii și ecuațiile cu valori proprii. Aceasta nu este întotdeauna adevărat, în special în fizica reactorilor. Este adevărat că el poate ajuta cînd se tratează probleme de valori proprii cu ajutorul matricelor, de exemplu cînd operatorul este de un astfel de tip încît funcțiile proprii devin complicate și se dorește aproximarea acestor funcții proprii cu ajutorul unui sistem ortogonal mai simplu, și așa mai departe, dar în general, domeniul de aplicație a matricelor în fizica reactorilor este în domeniul teoriei multigrupale, în domeniul sistemelor de ecuații diferențiale, al problemelor de difuzie a neutronilor, conducție a căldurii etc.

Să discutăm pe scurt una din posibilitățile de aplicare și anume, un calcul de perturbație. Pentru aceasta, vom începe cu ecuația (13.24), pe care o vom scrie acum în forma generală

$$\hat{L}\Phi = \lambda\Phi. \tag{13.54}$$

În acest caz, $\hat{L}$ poate fi un operator sau o matrice.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\hat{L}$ este un operator, atunci Φ este o funcţie şi dacă $\hat{L}$ este o matrice, atunci Φ este un vector-coloană. λ este o constantă. Să presupunem acum că partea stîngă a ecuaţiei (13.54) se schimbă puţin după un anumit timp, să zicem cu o cantitate $\hat{P} \cdot \Phi$, unde $\hat{P}$ este un operator (sau o matrice), care operează asupra aceleiaşi funcţii Φ ca şi $\hat{L}$. Perturbarea părţii stîngi a ecuaţiei (13.54) are ca efect o schimbare corespunzătoare $\delta\lambda \cdot \Phi$ a părţii din dreapta; $\delta\lambda$ trebuie să fie mic în comparaţie cu λ. Ecuaţia perturbată este

$$(\hat{L}+\hat{P})\Phi=(\lambda+\delta\lambda)\Phi \tag{13.55}$$

în care se presupune că Φ nu se schimbă substanţial datorită perturbării.

În general $\hat{L}$ nu va fi un operator (sau matrice) hermitic. Formăm deci adjunctul $\hat{L}^\dagger$ al lui $\hat{L}$ şi funcţia (vectorul) adjunctă corespunzătoare $\Phi^\dagger$. Atunci

$$\hat{L}^\dagger \Phi^\dagger = \lambda \Phi^\dagger \tag{13.56}$$

sau luînd conjugata complexă

$$\hat{L}^{\dagger *}\Phi^{\dagger *} = \lambda \Phi^{\dagger *}. \tag{13.57}$$

Pentru cazul în care $\hat{L}$ este un operator, dacă ecuaţia (13.55) este înmulţită la stînga cu $\Phi^{\dagger *}$, scăzută din (13.55) şi apoi integrată pe domeniul de ortogonalitate, se obţine

$$\int \Phi^{\dagger *}\hat{L}\Phi \, dx - \int \Phi \hat{L}^{\dagger *}\Phi^{\dagger *} dx + \int \Phi^{\dagger *}\hat{P}\Phi \, dx = \delta\lambda \int \Phi^{\dagger *}\Phi \, dx. \tag{13.58}$$

Deoarece $\hat{L}^\dagger$ este adjunctul lui $\hat{L}$, primii doi termeni se anulează reciproc, datorită ecuaţiei (13.35). În consecinţă,

$$\delta\lambda = \frac{\int \Phi^{\dagger *}\hat{P}\Phi \, dx}{\int \Phi^{\dagger *}\Phi \, dx}. \tag{13.59}$$

Aceasta este valabil cînd $\hat{L}$ şi $\hat{P}$ sînt simpli operatori. Dacă $\hat{L}$ şi $\hat{P}$ sînt matrice, atunci se obţine în mod corespunzător

$$\delta\lambda = \frac{\Phi\dagger^{*\prime} P\Phi}{\Phi\dagger^{*\prime}\Phi}. \tag{13.60}$$

În primul exemplu pe care dorim să-l dăm aici, $\hat{L}$ este un simplu operator, şi anume ca în ecuaţia (13.29)

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x^2} + B^2 \tag{13.61}$$

pentru ecuaţia cu valori proprii (13.28)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + B^2\Phi = (B^2 - 4\pi^2)\Phi = \lambda\Phi \tag{13.61}$$

în care considerăm acum numai cazul $\nu = 1$.

În cazul stării staţionare, $B^2 = 4\pi^2$ şi $\lambda = 0$. Dacă totuşi reactorul. care este la început într-o stare staţionară, este perturbat, de exemplu datorită schimbării uşoare a factorului de material B^2 cu o cantitate mică δB^2, adică

$$\hat{P} = \delta B^2 \tag{13.63}$$

atunci, conform ecuaţiei (13.59), variaţia corespunzătoare a lui λ este

$$\delta\lambda = \frac{\int \Phi\dagger^* \delta B^2 \Phi dx}{\int \Phi\dagger^* \Phi dx}. \tag{13.64}$$

Integralele trebuie extinse pe înălţimea (x) a zonei active a reactorului.

În acest caz, operatorul δB^2 este cu certitudine hermitic, deoarece el este un număr şi, mai mult, Φ trebuie să fie o funcţie reală. De aici,

$$\delta\lambda = \frac{\int \delta B^2(x)\Phi^2 dx}{\int \Phi^2 dx}. \tag{13.65}$$

Dacă variaţia δB^2 este uniformă în întreaga zonă activă, atunci se obţine rezultatul banal $\delta\lambda = \delta B^2$. Dacă δB^2 este constantă, într-o regiune anumită a zonei active, atunci se obţin aceleaşi formule cu cele deduse în capitolul trei, pentru reactorul în stare staţionară, cu condiţia de stabilitate $\delta\lambda = 0$, şi ecuaţia (13.65), trece în ecuaţia (3.5), cu o schimbare potrivită de notaţii.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru starea nestaționară, ecuația (13.65) dă constanta de timp $\delta\lambda$, cu care fluxul de neutroni din reactor crește sau scade, după o schimbare a factorului geometric (sau de material), pentru soluția ecuației perturbate a difuziei (12.10), cu $n=1$ și $x_1=\frac{1}{2}$

$$\Phi = A \cos 2\pi x \cdot \exp(-a\,\delta\lambda t). \tag{13.66}$$

În al doilea exemplu, pe care îl vom discuta pe scurt, L este o matrice. Vom începe cu ecuațiile (5.13) și (5.14) care descriu comportarea unui reactor cu un reflector, conform teoriei bigrupale. Vom extinde aceste ecuații, scriindu-le conform ecuației (13.62) pentru cazul nestaționar

$$\nabla^2\Phi^f - \frac{\Sigma^f}{D^f}\Phi^f + \frac{k_\infty \Sigma^{th}}{D^f}\Phi^{th} = \lambda\Phi^f \tag{13.67}$$

$$\nabla^2\Phi^{th} - \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}}\Phi^{th} + \frac{\Sigma^f}{D^{th}}\Phi^f = \lambda\Phi^{th}. \tag{13.68}$$

Scrise în formă matriceală, ele devin

$$\begin{vmatrix} \left(\nabla^2 - \frac{\Sigma^f}{D^f}\right) & \frac{k_\infty \Sigma^{th}}{D^f} \\ \frac{\Sigma^f}{D^{th}} & \left(\nabla^2 - \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}}\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi^f \\ \Phi^{th} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \Phi^f \\ \Phi^{th} \end{vmatrix} \tag{13.69}$$

Notația este aceeași ca în capitolul V. Cantitatea care aici, ca și în ecuația (13.62), este o măsură a vitezei de schimbare a fluxurilor de neutroni Φ^f și Φ^{th} și care se anulează în cazul staționar, apare aici ca valoare proprie a matricei

$$L = \begin{vmatrix} \left(\nabla^2 - \frac{\Sigma^f}{\Sigma^{th}}\right) & \frac{k_\infty \Sigma^{th}}{D^f} \\ \frac{\Sigma^f}{D^{th}} & \left(\nabla^2 - \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}}\right) \end{vmatrix} \tag{13.70}$$

Elementele matricei sînt acum în parte operatori.

Presupunem că reactorul a cărui comportare este descrisă de ecuația (13.69) trece la un nivel de putere superior, la un moment dat (adică la $t=0$). În această situație, factorul de multiplicare k_∞ este presupus a se schimba puțin, cu cantitatea δk_∞. În consecință, putem scrie matricea de perturbație

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Sigma^{th}}{D^f}\delta k_\infty \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{13.71}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acum pentru a calcula din ecuația (13.60), constanta de timp $\delta\lambda$ ne trebuie încă vectorul $\Phi^\dagger$, adjunctul lui

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^f \\ \Phi^{th} \end{pmatrix} \tag{13.72}$$

și pentru a-l găsi pe acesta trebuie găsită matricea $L^\dagger$, adjuncta matricei L. L conține numai elemente reale, astfel că $L^\dagger$ se deduce ușor din L cu ajutorul ecuației (13.53), schimbînd liniile și coloanele. Atunci

$$L^\dagger = \begin{vmatrix} \left(\nabla^2 - \frac{\Sigma^f}{D^f}\right) & \frac{\Sigma^f}{D^{th}} \\ k_\infty \frac{\Sigma^{th}}{D^f} & \left(\nabla^2 - \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}}\right) \end{vmatrix}. \tag{13.73}$$

Vectorul Φ este obținut conform ecuației (13.56), din soluția sistemului de ecuații

$$L^\dagger \Phi^\dagger = 0 \tag{13.74}$$

deoarece, înainte de perturbație, am presupus funcționarea reactorului în stare staționară, cu $\lambda = 0$.

Din ecuația (13.60) se obține în final constanta de timp

$$\delta\lambda = \frac{1}{\int (\Phi^{\dagger f} \Phi^f + \Phi^{th\dagger} \Phi^{th}) dV} \int (\Phi^{f\dagger} \Phi^{th\dagger}) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}} \delta k_\infty \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^f \\ \Phi^{th} \end{pmatrix} dV =$$

$$= \frac{\Sigma^{th}}{D^{th}} \frac{\int \Phi^{f\dagger} \Phi^{th} \delta k_\infty dV}{\int (\Phi^{f\dagger} \Phi^f + \Phi^{th\dagger} \Phi^{th}) dV}. \tag{13.75}$$

Integrala trebuie extinsă asupra întregului volum al reactorului.

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

1. *W. Riezler*, Einführung in die Kernphysik, Oldenbourg, München.
2. *W. Riezler, W. Walcher*, Kerntechnik, Teubner, Stuttgart.
3. *F. cap*, Physik und Technik der Atomreaktoren, Springer, Wien.
4. *S. Glasstone, M. Edlung*, The Elements of Nuclear Reactor Theory, MacMillan, London.
5. *R. L. Murray*, Nuclear Reactor Physics, Prentice-Hall Englewood Cliffs, N. Y.
6. *S. Glasstone*, Principles of Nuclear Reactor Engineering, Van Nostrand Company, New York, Toronto, London.
7. *J. Dietrich, W. Zinn*, Solid Fuel Reactors, Addison-Wesley Publishing Company, Reading/Mass.
8. *H. Bethe, ,Ph. Morrison*, Elementary Nuclear Theory, John Wiley, New York Chapman and Hall, London.
9. *R. A. Charpie, D. J. Littler*, Progress in Nuclear Energy, Pergamon Press, London.
10. *Horst Teichmann*, Einführung in die Atomphysik, Bibliograpisches Institut AG, Mannheim.
11. A—W Series in Nuclear Science and Engineering, Addison-Wesley Publishing Company Cambridge 42, Mass.
    Selected Reference Material on Atomic Energy. United States Atomic Energy Commission, McGraw-Hill, New York, Toronto, London.

Scanned with OKEN Scanner

Index

Absorbție de rezonanță 24
— — suprafață 113, 119
— — volum 113, 119
Apă (grea) 28, 33

B^2 — vezi factor Buckling
Bare de combustibil 30
— — control 31, 32, 134
Barn 44

Captură de neutroni 24
— — rezonanță
—, probabilitate de evitare a ~ 25, 68, 82, 88, 113, 118
—, integrala de ~ 84
—, regiune de ~ 25
Celulă (de rețea) 113, 115
Ciclu de reproducere U-233—Th-232, 203
Ciclul neutronului 31, 82
Cilindru cubic 95
Combustibil îmbogățit 192
Comportarea asimptotică a fluxului de neutroni 149
— dinamică a unui reactor 141
Condiție de criticitate 90, 96, 132
Constanta lui Planck 9
Constante de grup 118, 128
Conversie 33, 180
Curbura fluxului 214
Curent de răcire 157

Decrement mediu al pierderii de energie 60, 65
Densitate
— de încetinire 63
— de putere 192, 214
Deuteriu 12
Deuteron 12
Difuzie
—, constantă (coeficient) de ~ 50, 70 76
—, densitate a curentului de ~ 41, 48
—, ecuația de ~ 46, 88
—, lungime de ~ 90, 100, 124
—, teoria ~ 40, 46, 88
—, teoria ~ pentru încetinire 69
Drum liber mijlociu 42

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia lui Einstein 20
Electron-volt 20
Energie
— de legătură 14
— nucleară 14
—, pierdere (medie, logaritmică) de ~ 61, 65
— termică 19, 44
— termică într-un reactor 157
—, unităţi de ~ 19, 20

Factor
— Buckling (geometrie, de material) 54, 75, 88, 91, 93, 100, 110, 123, 130
— — conversie 33, 182
— — cuplaj 131
— — dezavantaj 115
— — multiplicare 87, 123, 141
— — multiplicare infinită k_∞ 87
— — pondere 104
— — scăpare a neutronilor rapizi 144
— — scurgere a neutronilor 32, 52
— f 85, 88
— f pentru reactorul eterogen 114
— k 87
— k efectiv 90
— p 25, 68, 82, 88, 113, 118
— ε 87
— η 86
— η pentru reactor eterogen 114, 124
— ν 82
— ξ 60, 65
Fisiune 18
— nucleară 18
—, fragmente de ~ 22
Flux de neutroni 153
—, scădere exponenţială a ~ 153
Formarea (generarea de perechi) 23
Formula celor patru factori 81
Forţe
— nucleare 14
— nucleonice 14

Generare de material fisionabil 195
Grad de ardere a combustibilului 194
Grafit 28, 33
—, reactor moderat cu ~ 34

Izotopi 12
— cu număr de masă mare pentru reproducere şi conversie 202, 211

Împrăştiere 28, 43

Letargie 60
Lungime de extrapolare 125

Masa protonului 10
Material fertil 180

Scanned with OKEN Scanner

Model atomic 9
— — al lui Rutherford 9
Moderator 28, 31, 62

Neptuniu 27
—, concentrație de ~ 181
Neutroni 10, 144
—, captura ~-lor 24
—, ciclul ~-lor 32, 82
— de fisiune 21, 22
—, densitatea curentului de ~ 40
—, doza de ~ 154
—, fisiune cu ~ 18, 28
—, flux de ~ 43
—, împrăștierea de ~ 28
—, încetinire de ~ 28, 47, 54
— întîrziați 21
— —, 21
— —, concentrația de ~ 144
— —, fracțiunea de ~ 144, 151
— lenți 19
—, masa ~-lor 10
—, scurgere de ~ 31, 52
—, sursă de ~ 47, 54
— termici 19
Nucleon 14
Nucleu 10
Număr de masă 11

Operator delta 50
Otrăvirea unui reactor 173
— — — cu izotopi grei 202
— — — cu produse de fisiune 177, 186
Otrăvuri 33

Particule α 18, 22
Particule β (raze) 22
Plutoniu 27, 33, 39, 111
—, arderea ~-lui 180
—, extragerea chimică a ~-lui 197
—, reciclarea ~-lui 197
Procese de conversie 188
Prompt critic
— —, comportarea unui reactor ~ 167
Protactiniu 27
Proton 10
Putere de încetinire (moderare) 62

Radiație
— de anihilare 23
— gama 23
Radioactivitate 21
Raport
— de moderare 62
— de reproducere 33

Scanned with OKEN Scanner

Reactivitate 198
—, spor de ~ 198
Reactor
—, autostabilizarea unui ~ 155
—, calculul ~-lui cu două grupe de neutroni 144
—, calculul ~-lui cu 6 grupe de neutroni 151
— Callder — Hall 34
— cilindric 94
— comportarea termică a unui ~ 155
— cu apă fierbătoare 33
— — — grea 33
— — — sub presiune 29
— — metal lichid 35
— — moderator organic 38
— — sodiu — grafit 35
— eterogen 32, 54, 112
— nuclear 29
— omogen 35, 97
—, oprirea ~-lui 153
—, pornirea ~-lui 159
— rapid 39
— răcit cu gaz 34
— răcit cu lichid 34
—, reglarea unui ~ 157
— reproducător 39
— sferic 93
— termic 27
Reacție
— în lanț 32, 144
— nucleare 18
Reciclarea combustibilului 197
Reflector 31, 125
—, economie de ~ 125
Regiune de energie
— intermediară 183
— termică 19, 26
Reproducere 28, 33

Sarcină elementară 10
Schimbător de căldură 30
Secțiune eficace 26, 40, 84, 98, 119
Sistemul centrului de masă 55
— laboratorului 56
Suprafață de migrație 90

Teacă 31
Temperatură
—, coeficient de ~ 155
—, distribuție de ~ în fluidul de răcire 216
—, efect de ~ 106
— la suprafața elementului de combustibil 218
— șoc de ~ 170
Teoria
— bigrupală 125, 128, 134, 148

Scanned with OKEN Scanner

Teoria încetinirii a lui Fermi 40, 46, 54, 62, 69
— monogrupală 46, 125
— multigrupală 46, 148
Termen de sursă 48, 88
Timp
— de încetinire 141
— — înjumătățire 24
— — viață a neutronului 141
Toriu 27
Transfer de căldură 164
Tritiu 12

Unități atomice de masă 11
Uraniu
— -233 27, 35
— -235 13, 17, 19
— -238 19, 24, 27
— -239 27
— -240 27
— îmbogățit 25, 33
— natural 25, 32

Variația de densitate a fluidului de răcire 170
Viața medie a unui neutron 149
Vîrsta Fermi 72, 88, 123

Xenon
—, efectul ~-lui la pornirea reactorului 175
—, otrăvirea cu ~ 174

Redactor: **Natalia Fincuie**
Tehnoredactor: **Nicolae Șerbănescu**
Coperta: **Alexandru Bann**

Bun de tipar: 02. 09. 1975. Coli de tipar: 17,75. Tiraj: 1 850+75 exemplare legate. C.Z.: 621.039.51.

Tiparul executat sub comanda nr. 92 la Întreprinderea poligrafică „Crișana" — Oradea, str. Moscovei nr. 5. Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner